

یک الگوریتم برای کنترل بهینه یک کلاس از سیستم‌های خطی متغیر با زمان تأخیری با رویکرد کاهش زمان محاسبات و افزایش سرعت در مسائل مهندسی

مهدی یوسفی طبری، زهرا رحمانی، علی وحیدیان کامیاد و سید جلیل ساداتی

با تأخیر زمانی - همان طور که در [۶] مشخص شد - منجر به یک مسأله مقدار مرزی دونقطه‌ای می‌شود که شامل هر دو شرط تأخیر و تقدم است و راه حل دقیق آن به جز در موارد بسیار خاص، بسیار دشوار است. در [۷] روشی پیشنهاد شده که شامل حل مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که به‌طور کلی از نظر محاسباتی زمان‌بر است. مرجع [۸] الگوریتم جدیدی با استفاده از توابع والش ارائه می‌دهد که در آن از ماتریس‌های عملیاتی والش برای تقریب جملات تأخیر و تقدم استفاده می‌شود. در [۹] یک رهیافت حساسیت برای به‌دست آوردن کنترل زیربهینه برای سیستم‌های خطی با تأخیر کوچک در حالت پیشنهاد شده است. آنها کنترل را در سری مک‌لارن در تأخیر گسترش دادند و ضرایب سری را از حل مسائل ساده مقدار مرزی دونقطه‌ای به‌دست آوردند. در [۱۰] شرایط لازم برای کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری قطعه‌ای ثابت و پیوسته با زمان ارائه شده است. با استفاده از هامیلتونین معمولی، اثر تأخیر در تابع هزینه، گنجانده و یک مسأله مقدار نهایی ثابت برای یک سیستم فرموله شده است. در [۱۱] روشی برای یافتن کنترل بهینه یک سیستم تأخیری خطی متغیر با زمان با معیار عملکرد مرتبه دوم مورد بحث قرار گرفته و ویژگی‌های توابع ترکیبی که از توابع بلوک پالس به اضافه چندجمله‌ای لژاندر تشکیل شده‌اند، ارائه گردیده است. در [۱۲] از متغیرهای کمک حالت و تقریب پده^۱ برای تبدیل مسأله به یک مسأله بدون تأخیر زمانی استفاده شده که مسأله را می‌توان با یک الگوریتم بهینه‌سازی توسعه‌یافته حل نمود. با جایگزین کردن عامل تأخیر زمانی به وسیله یک تقریب پده و با استفاده از یک ترفند در [۱۳]، ابتدا پارامتر تأخیر زمانی به یک متغیر حالت از سیستم، تبدیل و سپس از تئوری فیلتر کالمن برای طراحی یک تخمینگر حالت استفاده می‌شود. در [۱۴] یک روش تفاضل محدود ترکیبی چیشیف برای یافتن راه حل کنترل بهینه سیستم‌های تأخیر زمانی با معیار عملکرد مرتبه دوم، معرفی و اعمال شده که این روش، توسعه‌ای از طرح تفاضل محدود چیشیف است. در [۱۵] با استفاده از ویژگی‌های عملیاتی توابع بلوک پالس عمومی و چندجمله‌ای لژاندر، مسأله کنترل بهینه برای سیستم‌های تأخیر زمانی به یک سیستم معادلات جبری تبدیل می‌شود. در [۱۶] با استفاده از اصل ماکسیمم پونتریاگین، مسأله کنترل بهینه تأخیر زمانی اولیه، ابتدا به یک مسأله مقدار مرزی دونقطه‌ای تبدیل می‌شود که شامل هر تأخیر و تقدم است. سپس با استفاده از فرمول تفاضل محدود مرتبه دوم و درون‌یابی به ترتیب برای مشتقات مرتبه اول و عبارات تأخیری به سیستم معادلات جبری خطی تبدیل می‌شود.

چکیده: سیستم‌های تأخیر زمانی در چند دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند و بسیاری از آنها در سیستم‌ها و شاخه‌های مختلف علوم مانند مهندسی، شیمی، فیزیک و مدل‌های بیماری ظاهر می‌شوند. وجود تأخیر، تحلیل و کنترل چنین سیستم‌هایی را بسیار پیچیده‌تر می‌کند. استفاده از اصل حداکثر پونتریاگین برای مسائل کنترل بهینه با تأخیر زمانی منجر به یک مسأله مقدار مرزی می‌شود که شامل هر دو شرایط تأخیر و تقدم است. در این مقاله، یک مسأله کنترل بهینه با تأخیر زمانی را در نظر می‌گیریم. در بخش اول ابتدا با استفاده از اصل حداکثر پونتریاگین برای مسائل کنترل بهینه با تأخیر زمانی، شرایط بهینه لازم را برای این مسأله به‌دست می‌آوریم و سپس الگوریتمی جدید برای حل عددی این مسأله ارائه می‌گردد که بر پایه یک تقریب برای مشتقات و درون‌یابی خطی برای جملات تأخیر است. نهایتاً معادلات حاصل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شوند که می‌توان آنها را به‌صورت عددی حل نمود. کارایی روش پیشنهادی با شبیه‌سازی عددی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلیدواژه: کنترل بهینه، سیستم‌های تأخیری، اصل حداکثر پونتریاگین.

۱ - مقدمه

مسائل کنترل بهینه به‌طور طبیعی در حوزه‌های مختلف علوم، مهندسی و ریاضیات به وجود می‌آیند. کارهای قابل توجهی در زمینه کنترل بهینه سیستم‌های دینامیکی مرتبه صحیح انجام گردیده [۱] و [۲] و کنترل سیستم‌های با تأخیر زمانی یکی از زمینه‌های مهم تحقیقاتی بوده است. تأخیر، غالباً در سیستم‌های بیولوژیکی، شیمیایی، الکترونیکی و حمل‌ونقل رخ می‌دهد [۳]. سیستم‌های تأخیر زمانی دسته بسیار مهمی از سیستم‌ها هستند که کنترل و بهینه‌سازی آنها مورد توجه بسیاری از محققین است [۴]. عمومی‌شدن تئوری کنترل بهینه کلاسیک به سال ۱۹۵۰ همراه با کاربردهای آن در صنایع هوافضا در جریان جنگ سرد برمی‌گردد [۵].

این مقاله در تاریخ ۲۷ آبان ماه ۱۴۰۱ دریافت و در تاریخ ۱۸ اردیبهشت ماه ۱۴۰۲ بازنگری شد.

مهدی یوسفی طبری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران، (email: mehdi.yt61@gmail.com).

زهرا رحمانی (نویسنده مسئول)، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران، (email: zrahmani@nit.ac.ir).

علی وحیدیان کامیاد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، (email: vahidian@um.ac.ir).

سید جلیل ساداتی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران، (email: j.sadati@nit.ac.ir).

در این مسأله، دینامیک سیستم و حالت اولیه به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + bu(t) + c(t)x(t - \mu), & t \in [t, t_f] \\ x(t) = \gamma(t), & t \in [t - \mu, t] \end{cases} \quad (2)$$

که در این رابطه $x \in \mathbb{R}^n$ و $u \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردار حالت و کنترل، $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ، $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $Q_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس‌های نیمه‌معین مثبت^۲، ماتریس معین مثبت^۳، $\dot{x}(t)$ معرف مشتق مرتبه اول $x(t)$ ، $a(t)$ و $c(t)$ ماتریس‌های پیوسته معلوم با ابعاد مناسب، $\mu > 0$ تأخیر زمانی ثابت در حالت سیستم، b ماتریس ثابت و $\gamma(t)$ تابع حالت اولیه پیوسته و معلوم هستند. همچنین ساختار سیستم بدون اغتشاش و عدم قطعیت در نظر گرفته شده است.

با توجه به اصل حداکثر پونترباگین برای مسائل کنترل بهینه با تأخیر زمانی، شرایط بهینه لازم را می‌توان به صورت زیر نوشت [۶]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + c(t)x(t - \mu) + V(t)\lambda(t) \\ , & t \in [t, t_f] \\ \dot{\lambda}(t) = Q(t)x(t) + a^T(t)\lambda(t) + g(t)\lambda(t + \mu) \\ , & t \in [t, t_f] \\ x(t) = \gamma(t), & t \in [t - \mu, t] \\ \lambda(t_f) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

که در آن داریم

$$g(t) = X_{[t, t_f - \mu]}(t)c^T(t + \mu) \quad (4)$$

$$X_{[t, t_f - \mu]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t, t_f - \mu] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

که $V(t) = -bR^{-1}(t)b^T$ و قانون کنترل بهینه $u^*(t)$ به صورت زیر است

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)b^T(t)\lambda(t), \quad t \in [t, t_f] \quad (6)$$

همان طور که نشان داده شد، (۳) یک مسأله مقدار مرزی شامل جملات تأخیر و تقدم بوده که راه حل دقیق این مسأله بسیار دشوار است. برای حل این مسأله، یک طرح عددی کارآمد جهت پیدا کردن متغیرهای حالت و کمک حالت در بخش بعدی ارائه خواهد شد.

۳- روش پیشنهادی

اساس این روش بر پایه یک تقریب برای مشتقات و درون‌یابی خطی برای جملات تأخیر است. بر اساس این روش، مسأله کنترل بهینه تأخیری به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود که می‌توان آن را به صورت عددی حل نمود.

۳-۱ تقریب مشتقات

در بخش دوم از این تحقیق، جهت حل عددی معادلات حاصل، ابتدا بازه زمانی $[t, t_f]$ را به N زیربازه که اندازه هر کدام با $h = 1/N$ نمایش داده می‌شود تقسیم می‌نماییم. زمان در گره j ام با $t_j = jh$ مشخص گردیده و گره‌ها به صورت $0, 1, \dots, N$ نمادگذاری می‌شوند. از تقریب پسر و پیشرو مشتق مرتبه اول بسط تیلور برای حل عددی مسأله استفاده می‌نماییم

وجود تأخیر زمانی در سیستم‌های تأخیری باعث می‌شود که آنالیز و کنترل آنها بیش از پیش پیچیده گردد؛ بنابراین ارائه تکنیک‌های جدید تحلیلی و عددی برای حل مسأله کنترل بهینه سیستم‌های دینامیکی تأخیردار، یکی از زمینه‌های تحقیقاتی فعال و مشکل در تئوری کنترل است. همچنین مقالات ارائه‌شده در زمینه مسأله کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری عموماً راه‌حلی را با مشکلات محاسباتی جهت حل معادلات نهایی به صورت عددی معرفی کرده‌اند.

هدف اصلی این تحقیق، ارائه یک روش طراحی کنترل بهینه برای دسته‌ای از سیستم‌های تأخیری است. اگرچه این مسأله توسط محققین مورد بررسی قرار گرفته و روش‌هایی برای حل آن ارائه شده است، اما همچنان تحقیقاتی برای ارائه راه‌حل‌های مؤثر و کارآمد برای حصول دقت بیشتر، کاستن از پیچیدگی و حجم محاسبات و افزایش سرعت برای رسیدن به پاسخ بهینه با توجه به تنوع سیستم‌های کنترلی و کاربردهای آن در حال انجام است.

تا کنون گزارشی برای حل کردن مسأله کنترل بهینه تأخیری بر اساس روش پیشنهادی در سیستم‌های تأخیری ارائه نشده است. به همین منظور هدف و نوآوری این پژوهش، ارائه الگوریتمی جدید بر مبنای تقریب مشتق و درون‌یابی خطی جهت حل مسأله کنترل بهینه تأخیری برای دسته‌ای از این سیستم‌ها است. برای این منظور، ابتدا شرایط لازم بهینگی برای مسأله کنترل بهینه تأخیری را بیان نموده و سپس یک الگوریتم جدید برای حل عددی این مسأله ارائه می‌گردد. اساس این الگوریتم بر پایه تقریب برای مشتقات و درون‌یابی خطی برای جملات تأخیر است. بر اساس این روش، مسأله کنترل بهینه تأخیری به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود که می‌توان آنها را به صورت عددی حل نمود. کارایی روش پیشنهادی با حل چندین مثال عددی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و نشان داده می‌شود. بنابراین نوآوری مقاله حاضر به شرح زیر است:

- به دست آوردن معادلات اولر-لاگرانژ در سیستم‌های با دینامیک تأخیری جهت برقراری شرایط لازم بهینگی
- استفاده از تقریب مشتق برای تبدیل مشتقات به معادلات خطی
- گسسته‌سازی جملات تأخیر با درون‌یابی خطی
- تبدیل مسأله به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی

۲- بیان مسأله

در یک مسأله کنترل بهینه تأخیری^۱ (DOCP)، معیار عملکرد و یا دینامیک سیستم و یا هر دو، حداقل شامل یک جمله مشتق و همچنین تأخیر زمانی هستند. در این مقاله، منظور از حل مسأله کنترل بهینه تأخیری، به دست آوردن کنترل بهینه برای سیستم‌هایی است که دینامیک سیستم شامل مشتقات مرتبه صحیح بوده و همچنین متغیر حالت دارای تأخیر زمانی ثابت است که به صورت زیر تعریف می‌شود. هدف در مسأله کنترل بهینه تأخیری، پیدا کردن کنترل بهینه $u^*(t)$ برای یک سیستم دینامیکی تأخیری به قسمی است که معیار عملکرد زیر حداقل گردد

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_t^{t_f} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (1)$$

2. Positive Semi-Definite

3. Positive Definite

1. Delay Optimal Control Problem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_i x_i + c_i x(t_i - \mu) + V_i \lambda_i, & i = 1 \text{ to } N \\ \dot{\lambda}(t) = Q_i x_i + a_i^T \lambda_i + g_i \lambda(t_i + \mu), & i = 0 \text{ to } N-1 \end{cases} \quad (16)$$

۲-۳ تقریب تأخیر

از درون‌یابی خطی [۱۹] برای تقریب جملات تأخیر استفاده خواهد شد. تابع درون‌یاب خطی P بین دو نقطه $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ برای تابع f در بازه (a, b) به صورت زیر است

$$P(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad (17)$$

در (۱۶) می‌خواهیم که برای تابع $x(t_i - \mu)$ و $\lambda(t_i + \mu)$ در بازه $[t_{k-1}, t_k]$ درون‌یابی خطی انجام دهیم. تابع درون‌یاب به شکل زیر خواهد بود

$$x(t_i - \mu) = \frac{t_i - \mu - t_k}{t_{k-1} - t_k} x(t_{k-1}) + \frac{t_i - \mu - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} x(t_k) \quad (18)$$

$t_{k-1} \leq t_i - \mu \leq t_k$

$$\lambda(t_i + \mu) = \frac{t_i + \mu - t_k}{t_{k-1} - t_k} x(t_{k-1}) + \frac{t_i + \mu - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} x(t_k) \quad (19)$$

$t_{k-1} \leq t_i + \mu \leq t_k$

برای حل عددی (۸) و تبدیل آن به معادلات خطی به کمک (۱۸) و (۱۹)، جمله شامل تأخیر و تقدم را به کمک درون‌یابی خطی تقریب می‌زنیم

$$\begin{cases} m_\lambda = \frac{t_i - \mu - t_k}{t_{k-1} - t_k}, & t_{k-1} \leq t_i - \mu \leq t_k \\ m_\tau = \frac{t_i - \mu - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} m_\tau = \frac{t_i + \mu - t_k}{t_{k-1} - t_k}, & t_{k-1} \leq t_i + \mu \leq t_k \\ m_\lambda = \frac{t_i + \mu - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \end{cases} \quad (21)$$

$$x(t_i - \mu) = m_\lambda x(t_{k-1}) + m_\tau x(t_k), \quad t_{k-1} \leq t_i - \mu \leq t_k \quad (22)$$

$$\lambda(t_i + \mu) = m_\tau \lambda(t_{k-1}) + m_\lambda \lambda(t_k), \quad t_{k-1} \leq t_i + \mu \leq t_k \quad (23)$$

از (۲۲) و (۲۳) و دستگاه (۸)، فرم خطی یک دستگاه برای حل جملات شامل دستگاه (۸) با i معادله به دست می‌آید که به راحتی قابل حل است

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_i x_i + m_\lambda c_i x(t_{k-1}) + m_\tau c_i x(t_k) + V_i \lambda_i \\ , & i = 1 \text{ to } N \\ \dot{\lambda}(t) = Q_i x_i + a_i^T \lambda_i + m_\tau g_i \lambda(t_{k-1}) + m_\lambda g_i \lambda(t_k) \\ , & i = 0 \text{ to } N-1 \end{cases} \quad (24)$$

بر اساس روش پیشنهادی، مسأله کنترل بهینه تأخیری (۸) به کمک تقریب درون‌یابی خطی برای جملات شامل تأخیر به یک دستگاه جبری خطی (۲۴) تبدیل شده که به راحتی قابل حل خواهد بود.

ویژگی‌های مهم روش پیشنهادی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

- الف) استفاده از روش غیرمستقیم اصل پونتریاگین در حل مسأله کنترل بهینه
- ب) استفاده از درون‌یابی خطی و تقریب مشتق برای جملات تأخیر و مشتقات

$$f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad (7)$$

با استفاده از تقریب (۷) برای مشتقات، معادله سیستم (۳) را برای حل عددی آن بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_i x_i + c_i x(t_i - \mu) + V_i \lambda_i, & i = 1 \text{ to } N \\ \dot{\lambda}(t) = Q_i x_i + a_i^T \lambda_i + g_i \lambda(t_i + \mu), & i = 0 \text{ to } N-1 \end{cases} \quad (8)$$

تعمیم روش

در این بخش از تقریب اختلاف مرکزی مشتق مرتبه اول بسط تیلور برای حل عددی مسأله استفاده نموده‌ایم. می‌توان از تقریب گرانوالد-لنتیکف برای مشتقات کسری برای حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های کسری تأخیری استفاده کرد که به اختصار به آن اشاره می‌گردد.

تبصره ۱

فرض کنید $x(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع وابسته به زمان، $\alpha > 0$ مرتبه کسری مشتق و $n = [\alpha] + 1$ باشد. آنگاه مشتق کسری چپ و راست ریمان-لیوویل به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷]:

$${}_a D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad a \leq t \leq b \quad (9)$$

مشتق کسری ریمان-لیوویل راست

$${}_t D_b^\alpha x(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad a \leq t \leq b \quad (10)$$

همچنین اگر α یک عدد صحیح باشد می‌توان نوشت [۱۷]

$${}_a D_t^n x(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (11)$$

$${}_t D_b^n x(t) = (-1)^n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (12)$$

به منظور حل عددی معادلات حاصل برای سیستم‌های تأخیری مرتبه کسری، ابتدا بازه زمانی $[t, t_f]$ را به N زیربازه که اندازه هر کدام با $h = 1/N$ نمایش داده می‌شود، تقسیم و زمان را در گره j ام با $t_j = jh$ مشخص می‌کنیم. گره‌ها به صورت $0, 1, \dots, N$ نمادگذاری می‌شوند. تقریب گرانوالد-لنتیکف برای مشتقات به صورت زیر است [۱۷] و

$${}_t D_t^\alpha x_i = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^i \omega_j^\alpha x_{i-j}, \quad i = 1 \text{ to } N \quad (13)$$

$${}_t D_t^\alpha \lambda_i = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=i}^N \omega_{j-i}^\alpha \lambda_j, \quad i = 1 \text{ to } N-1 \quad (14)$$

که x_i و λ_i تقریب عددی برای $x(t)$ و $\lambda(t)$ در گره i ام است و داریم

$$\omega_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (15)$$

با استفاده از تقریب (۱۳) و (۱۴) برای مشتقات، معادله سیستم (۳) را برای حل عددی آن بازنویسی می‌کنیم

1. Left Riemann-Liouville Fractional Derivative
2. Right Riemann-Liouville Fractional Derivative

جدول ۲: مقایسه شاخص عملکرد با روش‌های مختلف برای مثال ۱ به ازای $c(t) = 1$.

روش حل مسأله	مقدار تابع هدف J
[۲۰]	۱,۶۴۱۹
[۸]	۱,۶۴۹۷
[۲۱]	۱,۶۴۸۸
[۲۲]	۱,۶۴۷۸
Present method	۱,۶۴۹۷

جدول ۴: مقایسه زمان پردازش سپری شده (در ثانیه) برای مقادیر مختلف h و $c(t) = t$ در مثال ۱.

h	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۱	۰,۰۰۵	۰,۰۱	۰,۰۵	۰,۱
روش پیشنهادی	۱۲,۳۴۶۷	۲,۲۳۱۱	۰,۰۵۴۷	۰,۰۱۲۵	۰,۰۰۱۴	۰,۰۰۰۷
[۲۱]	-	۱,۰۵۱۳	۰,۰۷۱۹	۰,۰۳۲۸	۰,۰۱۲۶	۰,۰۱۰۰

$$\begin{cases} m_r = \frac{t_i + 1 - t_k}{t_{k-1} - t_k} \\ m_r = \frac{t_i + 1 - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \end{cases}, t_{k-1} \leq t_i + 1 \leq t_k \quad (29)$$

$$x(t_i - 1) = m_r x(t_{k-1}) + m_r x(t_k), t_{k-1} \leq t_i - 1 \leq t_k \quad (30)$$

$$\lambda(t_i + 1) = m_r \lambda(t_{k-1}) + m_r \lambda(t_k), t_{k-1} \leq t_i + 1 \leq t_k \quad (31)$$

از (۳۰) و (۳۱) و دستگاه (۲۷)، فرم خطی یک دستگاه برای حل جملات شامل دستگاه معادلات (۲۷) با استفاده از (۲۴) با تعداد i معادله به دست می‌آید که به راحتی قابل حل است

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = m_r c_i x(t_{k-1}) + m_r c_i x(t_k) - \lambda_i, i = 1 \text{ to } N \\ \dot{\lambda}(t) = x_i + m_r g_i \lambda(t_{k-1}) + m_r g_i \lambda(t_k), i = 0 \text{ to } N-1 \end{cases} \quad (32)$$

روش پیشنهادی توصیف شده در بخش ۳ به ازای $c(t) = 1$ و $c(t) = t$ برای حل مسأله کنترل بهینه تأخیری (۲۷) استفاده شده است. برای $c(t) = t$ در جدول ۱، شاخص عملکرد J به دست آمده و مقادیر ارائه شده است. در جدول ۲، شاخص عملکرد J برای $c(t) = 1$ با نتایج به دست آمده در سایر مقالات مقایسه گردیده است. از جدول‌های ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت که نتایج حاصل از روش پیشنهادی این پژوهش با سایر روش‌های حل واقعی ارائه شده در [۸] و [۲۰] تا [۲۲] نزدیکی خوبی دارند. علاوه بر این، توابع حالت و کنترل به ازای مقادیر مختلف h در شکل‌های ۱ و ۲ رسم شده است. شکل‌های به دست آمده از نتایج شبیه‌سازی این روش با سایر مراجع در دقت‌های بالا انطباق خوبی با یکدیگر دارند. از جدول ۴ می‌توان دریافت که روش پیشنهادی، زمان پردازش کمتری نسبت به [۲۱] دارد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که روش برنامه‌ریزی خطی با ترکیب تقریب مشتق و درون‌یابی خطی، کارآمد و در عین حال ساده است؛ حجم و مدت زمان پردازش را کاهش می‌دهد. نتایج ارائه شده در جداول ۱ و ۲ نشان می‌دهند که نتایج عددی، همگرایی خوبی دارند، هنگامی که تعداد بازه‌های درون‌یابی افزایش می‌یابد. علاوه بر این، زمان پردازش سپری شده (در ثانیه) و تابع هدف J برای مقادیر مختلف N در جدول ۱ گزارش شده است.

تبصره ۲

در [۲۰] از زیرفضاهای Y^N متشکل از توابعی استفاده شده که به صورت تکه‌ای در بازه تأخیر $[-h, 0]$ ثابت هستند. این طرح، تقریب

جدول ۱: زمان پردازش سپری شده (در ثانیه) و تابع هدف J برای مقادیر مختلف N و $c(t) = t$ در مثال ۱.

N	h	J	CPU time
۲۰	۰,۱	۱,۳۰۵۵	۰,۰۰۰۷۹
۴۰	۰,۰۵	۱,۱۷۰۳	۰,۰۰۱۴۱
۲۰۰	۰,۰۱	۱,۰۷۲۷	۰,۰۱۲۵۳
۴۰۰	۰,۰۰۵	۱,۰۶۱۱	۰,۰۵۴۷۷
۲۰۰۰	۰,۰۰۱	۱,۰۵۱۹	۲,۲۳۱۱۸
۴۰۰۰	۰,۰۰۰۵	۱,۰۵۰۸	۱۲,۳۴۶۷۰

جدول ۳: مقایسه مقادیر تابع هدف J برای مقادیر مختلف h و $c(t) = t$ در مثال ۱.

h	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۱	۰,۰۰۵	۰,۰۱	۰,۰۵	۰,۱
روش پیشنهادی	۱,۰۵۰۸	۱,۰۵۱۹	۱,۰۶۱۱	۱,۰۷۲۷	۱,۱۷۰۳	۱,۳۰۵۵
[۲۱]	-	۱,۰۵۱۳	۱,۰۵۶۳	۱,۰۶۲۹	۱,۱۲۱۷	۱,۲۰۱۸

(ج) تبدیل مسأله کنترل بهینه تأخیری به مسأله برنامه‌ریزی خطی
(د) کارایی، سرعت بالا و در عین حال سادگی روش پیشنهادی

۴- مثال‌های عددی

در این بخش با استفاده از مثال‌های عددی به بررسی قابلیت‌های روش پیشنهادی از جمله سادگی و دقت بالای آن در حل مسأله کنترل بهینه خطی تأخیری می‌پردازیم. برای مثال‌های ارائه شده، نتایج عددی به دست آمده از روش پیشنهادی با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه شده است.
مثال ۱: مسأله کنترل بهینه زیر را با وجود تأخیر در حالت در نظر بگیرید

$$\min J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) + u^T(t)) dt \quad (25)$$

به طوری که سیستم تأخیری

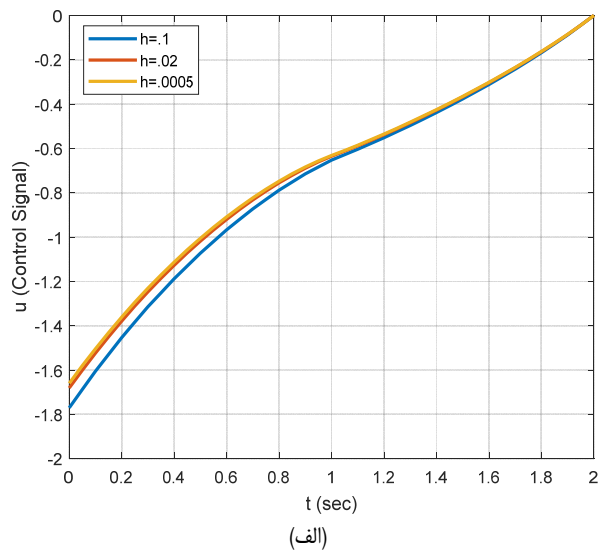
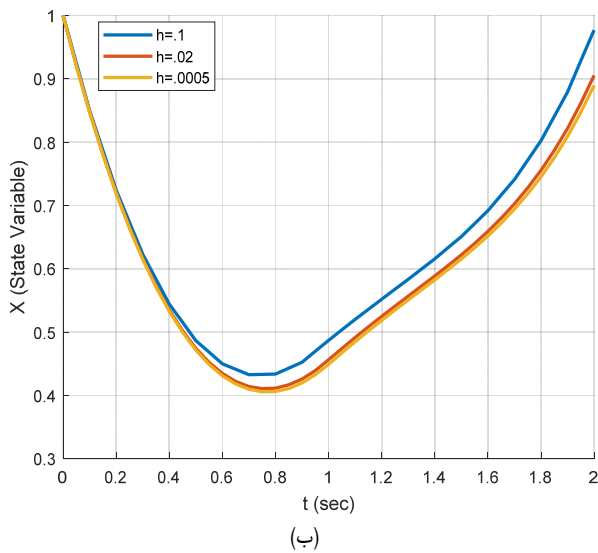
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c(t)x(t-1) + u(t), t \in [0, 2] \\ x(t) = 1, t \in [-1, 0] \end{cases} \quad (26)$$

با استفاده از روش پیشنهادی برای حل این مسأله در این مثال داریم: $c(t) = t$, $\mu = 1$, $b = 1$, $a(t) = 0$ و $Q = R = 1$. بنابراین شرایط بهینه‌سازی شده با (۸) به صورت زیر تبدیل می‌شوند

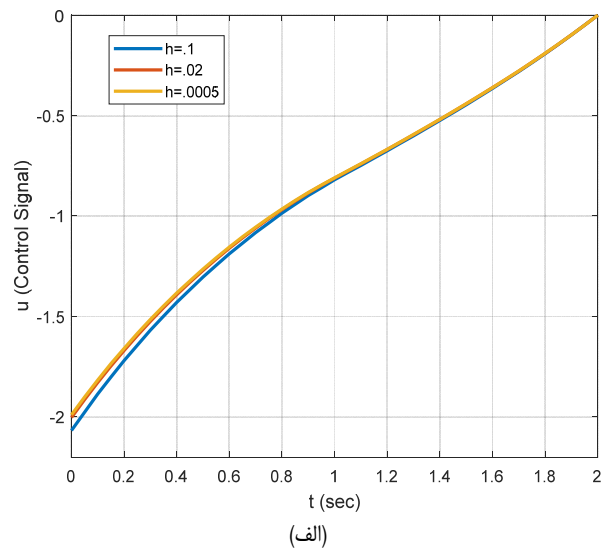
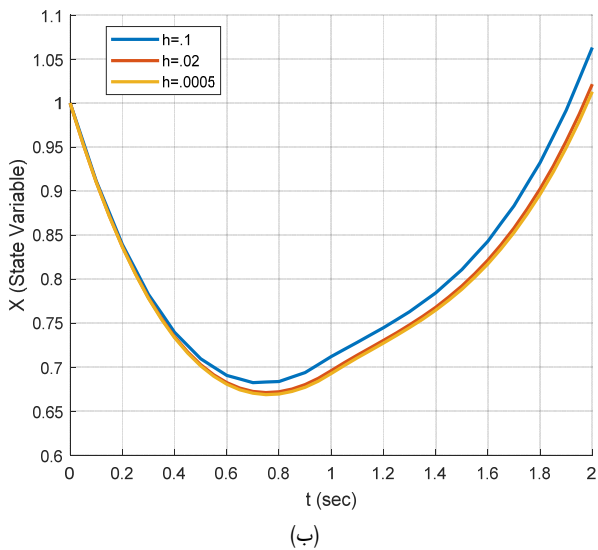
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c(t)x(t-1) - \lambda(t), t \in [0, 2] \\ \dot{\lambda}(t) = x(t) + g(t)\lambda(t+1), t \in [0, 2] \\ x(t) = 1, t \in [-1, 0] \\ \lambda(2) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

با استفاده از روابط بخش ۳-۲ ابتدا مسأله را گسسته نموده و سپس برای حل عددی (۲۷) و تبدیل آن به معادلات خطی به کمک (۲۰) و (۲۱) جمله شامل تأخیر را به کمک درون‌یابی خطی تقریب می‌زنیم

$$\begin{cases} m_r = \frac{t_i - 1 - t_k}{t_{k-1} - t_k} \\ m_r = \frac{t_i - 1 - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \end{cases}, t_{k-1} \leq t_i - 1 \leq t_k \quad (28)$$



شکل ۱: توابع حالت و کنترل مثال ۱ برای $c(t) = t$ و مقادیر مختلف h .



شکل ۲: توابع حالت و کنترل مثال ۱ برای $c(t) = 1$ و مقادیر مختلف h .

در این مثال داریم: $Q = R = 1$ و $\mu = 1$ ، $a(t) = t$ ، $b = 1$ ، $c(t) = 1$ بنابراین شرایط بهینه‌سازی شده با (۱۶) به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = tx(t) + x(t-1) - \lambda(t), & t \in [0, 2] \\ \dot{\lambda}(t) = x(t) + t\lambda(t) + g(t)\lambda(t+1), & t \in [0, 2] \\ x(t) = 1, & t \in [-1, 0] \\ \lambda(2) = 0. \end{cases} \quad (35)$$

با استفاده از روابط بخش ۳-۲ ابتدا مسأله را گسسته نموده و سپس برای حل عددی (۳۵) و تبدیل آن به معادلات خطی به کمک (۲۰) و (۲۱)، جمله شامل تأخیر را به کمک درون‌یابی خطی تقریب می‌زنیم

$$\begin{cases} m_\lambda = \frac{t_i - 1 - t_k}{t_{k-1} - t_k}, & t_{k-1} \leq t_i - 1 \leq t_k \\ m_\tau = \frac{t_i - 1 - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} m_\tau = \frac{t_i + 1 - t_k}{t_{k-1} - t_k}, & t_{k-1} \leq t_i + 1 \leq t_k \\ m_\tau = \frac{t_i + 1 - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \end{cases} \quad (37)$$

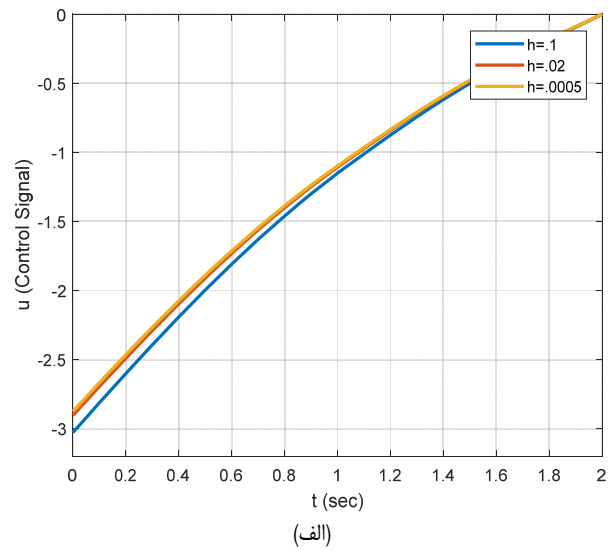
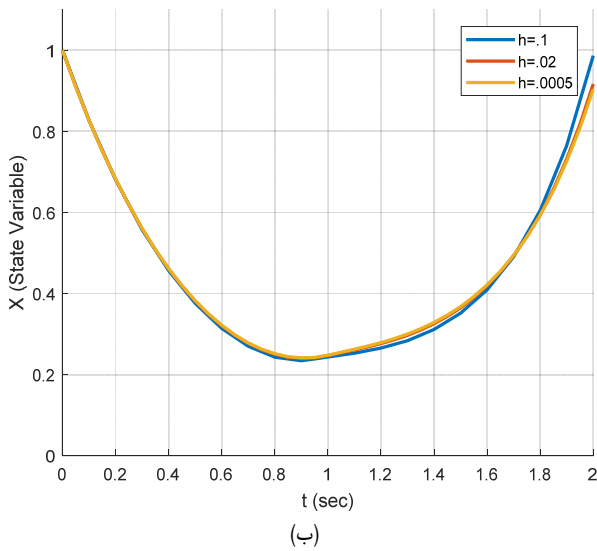
متوسط شناخته می‌شود. در [۸] نویسندگان از توابع والش برای حل مسأله DFOC استفاده کرده‌اند. در [۲۱] برای سیستم‌هایی که دینامیک آنها شامل مشتقات کسری ریمن-لیوویل است، ابتدا معادلات اولر-لاگرانژ در سیستم‌های با دینامیک کسری تأخیری جهت برقراری شرایط لازم بهینه‌گی بررسی و تشریح شده و سپس با استفاده از یک الگوریتم بر پایه یک تقریب برای مشتقات کسری و یک تقریب گسسته‌سازی برای جملات تأخیر، مسأله به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. در [۲۲] با استفاده از موجک‌های چلیشکوف متعامد و ماتریس‌های عملیاتی، روش عددی مستقیم کارآمدی برای به‌دست‌آوردن راه حل تقریبی مسائل کنترل بهینه کسری تأخیر زمانی پیشنهاد شده است.

مثال ۲: مسأله کنترل بهینه زیر را با وجود تأخیر در حالت در نظر بگیرید

$$\min J = \frac{1}{2} \int_t^{t_f} (x^T(t) + u^T(t)) dt \quad (33)$$

به طوری که سیستم تأخیری

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = tx(t) + x(t-1) + u(t), & t \in [0, 2] \\ x(t) = 1, & t \in [-1, 0] \end{cases} \quad (34)$$



شکل ۳: توابع حالت و کنترل مثال ۲ برای مقادیر مختلف h .

جدول ۶: شاخص عملکرد و زمان پردازش سپری شده (در ثانیه) برای مقادیر مختلف h در مثال ۲.

N	h	J	CPU time
۲۰	۰٫۱	۵٫۸۶۲۳۱	۰٫۰۰۲۱۶۰
۴۰	۰٫۰۵	۵٫۳۰۲۳۹	۰٫۰۰۳۳۵۴
۲۰۰	۰٫۰۱	۴٫۸۹۳۹۰	۰٫۰۱۲۷۳۵
۴۰۰	۰٫۰۰۵	۴٫۸۴۵۱۱	۰٫۰۳۷۸۶۵
۲۰۰۰	۰٫۰۰۱	۴٫۸۰۶۴۲	۲٫۳۴۲۴۳
۴۰۰۰	۰٫۰۰۰۵	۴٫۸۰۱۶	۱۴٫۸۶۳۶

جدول ۷: مقایسه زمان پردازش سپری شده (در ثانیه) برای مقادیر مختلف h در مثال ۲.

h	۰٫۰۰۴	۰٫۰۴	۰٫۴
Present method	۰٫۰۶۴۴۵۰	۰٫۰۰۱۴۶۱	۰٫۰۰۰۹۱۸
[۱۶]	۰٫۳۵۴۵۴۵	۰٫۰۰۲۰۶۲	۰٫۰۰۰۸۶۳

از جدول ۷ می‌توان دریافت روش پیشنهادی زمان پردازش کمتری نسبت به [۱۶] دارد. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهند که روش برنامه‌ریزی خطی با تقریب مشتق و درون‌یابی خطی، کارآمد و در عین حال ساده است و حجم و مدت زمان پردازش را کاهش می‌دهد.

تبصره ۳

در [۲۶] از توابع والش برای حل مثال ۲ استفاده شده است. مرجع [۲۷] روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی پویای تکرارشونده و [۲۳] روشی بر اساس چندجمله‌ای لاگرانژ مرتبه کسری (FLP) و روش همبستگی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری ارائه کرده است. در [۲۵] راه حلی بر اساس ویژگی‌های توابع ترکیبی ارائه شده که شامل توابع بلوک پالس و چندجمله‌ای برنولی است. در [۱۶] از فرمول اختلاف محدود مرتبه دوم و چندجمله‌ای درون‌یابی aHermite برای مشتقات مرتبه اول برای حل مسأله استفاده شده است. در [۲۴] روش حل بر اساس خواص توابع ترکیبی متشکل از توابع بلوک پالس و چندجمله‌ای برنولی ارائه شده است. مرجع [۲۲] با استفاده از موجک‌های چلیشکوف متعامد و ماتریس‌های عملیاتی، یک روش عددی مستقیم برای حل تقریبی پیشنهاد داده است.

مثال ۳: پانتوگراف وسیله‌ای است که جریان الکتریکی را از خطوط هوایی قطارهای الکتریکی یا تراموا جمع‌آوری می‌کند. معادله پانتوگراف از [۲۸] نشأت می‌گیرد که سیستم جمع‌آوری برق بالای سر قطارها را

جدول ۵: مقایسه شاخص عملکرد با روش‌های مختلف برای مثال ۲.

روش حل مسأله	مقدار تابع هدف J
[۲۷]	۶٫۲۶۷۷
[۲۶]	۶٫۰۰۷۹
[۲۳]	۴٫۹۵۳۳
[۲۵]	۴٫۷۴۰۷
[۱۶]	۴٫۷۹۶۷
[۲۴]	۴٫۷۹۸۵
[۲۲]	۴٫۷۹۶۷
Present method ($h=0.0002$)	۴٫۷۹۷۸

$$x(t_i - 1) = m_r x(t_{k-1}) + m_r x(t_k), \quad t_{k-1} \leq t_i - 1 \leq t_k \quad (38)$$

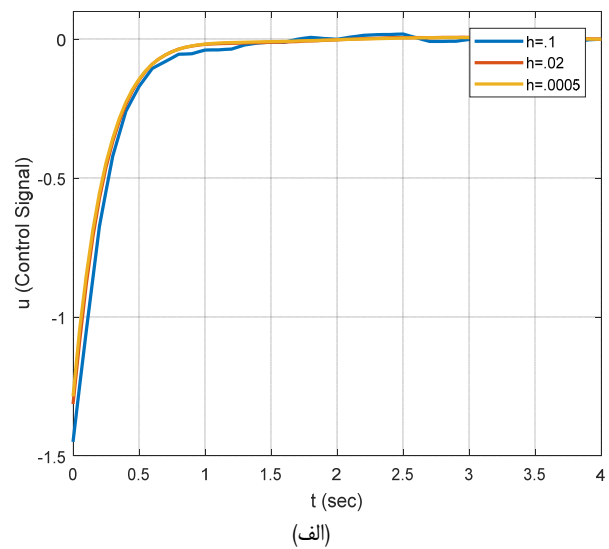
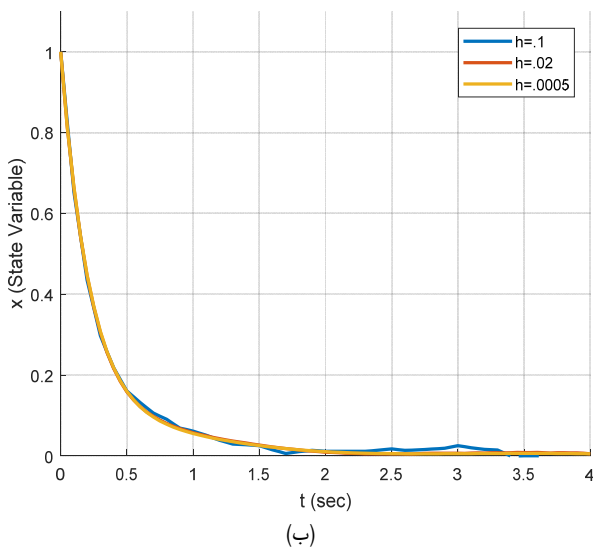
$$\lambda(t_i + 1) = m_r \lambda(t_{k-1}) + m_r \lambda(t_k), \quad t_{k-1} \leq t_i + 1 \leq t_k \quad (39)$$

از (۳۸) و (۳۹) و دستگاه (۳۵)، فرم خطی یک دستگاه برای حل جملات شامل دستگاه (۳۵) با استفاده از (۲۴) با تعداد i معادله به‌دست می‌آید که به‌راحتی قابل حل است

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t_i x_i + m_r c_i x(t_{k-1}) + m_r c_i x(t_k) - \lambda_i \\ , \quad i = 1 \text{ to } N \\ \dot{\lambda}(t) = x_i + t_i \lambda_i + m_r g_i \lambda(t_{k-1}) + m_r g_i \lambda(t_k) \\ , \quad i = 0 \text{ to } N-1 \end{cases} \quad (40)$$

جدول ۵ مقایسه‌ای را بین شاخص عملکرد J به‌دست‌آمده و مقادیر ارائه‌شده در سایر منابع ارائه می‌دهد. از نتایج ارائه‌شده می‌توان نتیجه گرفت که نتایج حاصل از روش پیشنهادی این پژوهش با سایر روش‌های ارائه‌شده در [۱۶] و [۲۲] تا [۲۵] مطابقت خوبی دارند. به‌علاوه به‌راحتی می‌توان دریافت که مقادیر گزارش‌شده در [۲۶] و [۲۷] با نتایج عددی دیگر مطابقت خوبی ندارند.

توابع حالت و کنترل برای تکرارهای مختلف الگوریتم ارائه‌شده در شکل ۳ رسم گردیده است. شکل‌های به‌دست‌آمده از نتایج شبیه‌سازی این روش با سایر مراجع ارائه‌شده در دقت‌های بالا، انطباق خوبی با یکدیگر دارند. نتایج جدول ۶ نشان می‌دهند هنگامی که تعداد بازه‌های درون‌یابی افزایش می‌یابد نتایج عددی، همگرایی خوبی دارند. علاوه بر این، زمان پردازش سپری‌شده (در ثانیه) و تابع هدف J در جدول ۶ ذکر شده است.



شکل ۴: توابع حالت و کنترل مثال ۳ برای مقادیر مختلف h .

جدول ۸: شاخص عملکرد و زمان پردازش سپری شده (در ثانیه) برای مقادیر مختلف h در مثال ۳.

N	h	J	CPU time
۲۰	۰٫۱	۰٫۲۸۹۶	۰٫۰۰۸۹
۱۰۰	۰٫۰۲	۰٫۱۸۳۱	۰٫۰۱۷۰
۴۰۰	۰٫۰۰۵	۰٫۱۶۶۹	۰٫۴۴۳۶
۴۰۰۰	۰٫۰۰۰۵	۰٫۱۶۲۴	۲۴۵٫۳۰

مدل سازی و طراحی مجدد کردند تا اطمینان حاصل شود که تماس در سراسر آن برقرار است. در سال های اخیر، تحقیقات زیادی روی این معادله متمرکز شده که در اینجا از یک نمونه از این کارها برای حل به روش ارائه شده در این مقاله استفاده می نماییم. سیستم های کنترل بهینه با تأخیر پانتوگراف زیر را در نظر بگیرید [۲۹]

$$\min J = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} (x^T(t) + u^T(t)) dt \quad (41)$$

به طوری که

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(\frac{t}{\gamma}) + \gamma u(t), & t \in [0, \gamma] \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (42)$$

توجه: روش پیشنهادی علاوه بر سیستم های ارائه شده، برای سیستم های با تأخیر پانتوگراف قابل تعمیم است. در این مثال از این نوع سیستم ها استفاده شده است.

در این مثال داریم: $a(t) = 0, b = \gamma, c(t) = 1$ و $Q = R = 1$; بنابراین شرایط بهینه سازی شده با (۱۶) به صورت زیر تبدیل می شود

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(\frac{t}{\gamma}) - \gamma \lambda(t), & t \in [0, \gamma] \\ \dot{\lambda}(t) = x(t) + g(t)\lambda(\frac{t}{\gamma}), & t \in [0, \gamma] \\ x(0) = 1 \\ \lambda(\gamma) = 0 \end{cases} \quad (43)$$

با استفاده از روابط بخش ۳، ابتدا مسأله را گسسته نموده و سپس برای حل عددی (۴۳) و تبدیل آن به معادلات خطی به کمک (۲۰) و (۲۱)، جمله شامل تأخیر را به کمک درون یابی خطی تقریب می زنیم

$$\begin{cases} m_{\lambda} = \frac{\frac{t_i}{\gamma} - t_k}{\gamma} \\ m_r = \frac{\frac{t_i}{\gamma} - t_{k-1}}{\gamma} \end{cases}, t_{k-1} \leq \frac{t_i}{\gamma} \leq t_k \quad (44)$$

$$\begin{cases} m_r = \frac{\frac{t_i}{\gamma} - t_k}{\gamma} \\ m_{\lambda} = \frac{\frac{t_i}{\gamma} - t_{k-1}}{\gamma} \end{cases}, t_{k-1} \leq \frac{t_i}{\gamma} \leq t_k \quad (45)$$

$$x(\frac{t_i}{\gamma}) = m_{\lambda} x(t_{k-1}) + m_r x(t_k), t_{k-1} \leq \frac{t_i}{\gamma} \leq t_k \quad (46)$$

$$\lambda(\frac{t_i}{\gamma}) = m_r \lambda(t_{k-1}) + m_{\lambda} \lambda(t_k), t_{k-1} \leq \frac{t_i}{\gamma} \leq t_k \quad (47)$$

از (۴۶) و (۴۷) و دستگاه (۴۳)، فرم خطی یک دستگاه برای حل جملات شامل دستگاه (۴۳) با استفاده از (۲۴) با تعداد i معادله به دست می آید که به راحتی قابل حل است

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = m_{\lambda} c_i x(t_{k-1}) + m_r c_i x(t_k) - \gamma \lambda_i, & i = 1 \text{ to } N \\ \dot{\lambda}(t) = x_i + m_r g_i \lambda(t_{k-1}) + m_{\lambda} g_i \lambda(t_k), & i = 0 \text{ to } N-1 \end{cases} \quad (48)$$

برای یافتن یک قانون کنترل بهینه، الگوریتم پیشنهادی در بخش ۳ را به کار می گیریم. نتایج شبیه سازی الگوریتم پیشنهادی به ازای مقادیر مختلف h در جدول ۸ گزارش شده است. این نتایج شامل مقدار عددی شاخص عملکرد و زمان صرف شده توسط پردازنده کامپیوتر در تکرارهای مختلف الگوریتم می باشد. همان گونه که در جدول ۸ نشان داده شده، با افزایش h دقت پاسخ و زمان پردازش افزایش یافته است.

در جدول ۹، نتایج حاصل از روش پیشنهادی با پاسخ به دست آمده از روش ارائه شده در [۲۹] تا [۳۲] مقایسه شده است. همان گونه که مشاهده می گردد مقدار عددی شاخص عملکرد، نزدیکی بسیار خوبی با پاسخ [۲۹] تا [۳۲] دارد و با افزایش h دقت پاسخ نسبت به مراجع فوق افزایش می یابد. با توجه به نتایج ارائه شده در جداول ۸ و ۹ علاوه بر اینکه زمان

تعمیم مسأله در بخش ۳ به آن اشاره شد و تأخیر ترکیبی و سیستم‌های غیرخطی گسترش دهیم.

مراجع

- [1] M. R. Hestenes, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Wiley, 1966.
- [2] A. E. Bryson, "Optimal control-1950 to 1985," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 16, no. 3, pp. 26-33, Jun. 1996.
- [3] M. Jamshidi and C. Wang, "A computational algorithm for large-scale nonlinear time-delay systems," *IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics*, vol. 14, no. 1, pp. 2-9, Jan.-Feb. 1984.
- [4] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi, *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, Elsevier Science Inc., 1987.
- [5] H. J. Sussmann and J. C. Willems, "300 years of optimal control: from the brachistochrone to the maximum principle," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, no. 3, pp. 32-44, 1997.
- [6] G. Kharatishdi, "The maximum principle in the theory of optimal processes with time lags," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 136, no. 1, pp. 39-43, 1961.
- [7] D. Eller, J. Aggarwal, and H. Banks, "Optimal control of linear time-delay systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 14, no. 6, pp. 678-687, Dec. 1969.
- [8] K. Palanisamy and R. G. Prasada, "Optimal control of linear systems with delays in state and control via Walsh functions," *IEE Proc. D-Control Theory and Applications*, vol. 130, no. 6, pp. 300-312, Nov. 1983.
- [9] K. Inoue, H. Akashi, K. Ogino, and Y. Sawaragi, "Sensitivity approaches to optimization of linear systems with time delay," *Automatica*, vol. 7, no. 6, pp. 671-679, Nov. 1971.
- [10] J. Banas and A. Vacroux, "Optimal piecewise constant control of continuous time systems with time-varying delay," *Automatica*, vol. 6, no. 6, pp. 809-811, Nov. 1970.
- [11] H. R. Marzban and M. Razzaghi, "Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials," *J. of the Franklin Institute*, vol. 341, no. 3, pp. 279-293, May 2004.
- [12] L. Y. Lee, "Numerical solution of time-delayed optimal control problems with terminal inequality constraints," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 14, no. 3, pp. 203-210, Jul./Sept. 1993.
- [13] ها. چهنکندی نژاد، م. فرشاد و ر. هاونگی، "ارائه یک روش جدید به منظور تخمین برخط تأخیر زمانی در سیستم‌های SISO-LTI با تأخیر زمانی متغیر با زمان و نامعلوم در ورودی کنترلی،" نشریه مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران، الف-مهندسی برق، سال ۱۸، شماره ۱، صص. ۴۴-۳۶، بهار ۱۳۹۹.
- [14] H. Marzban and S. Hoseini, "Solution of linear optimal control problems with time delay using a composite Chebyshev finite difference method," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 34, no. 3, pp. 253-274, May/June 2013.
- [15] X. T. Wang, "Numerical solutions of optimal control for time delay systems by hybrid of block-pulse functions and Legendre polynomials," *Applied Mathematics*, vol. 184, no. 2, pp. 849-856, 15 Jan. 2007.
- [16] A. Jajarmi and M. Hajipour, "An efficient finite difference method for the time-delay optimal control problems with time-varying delay," *Asian J. of Control*, vol. 19, no. 2, pp. 554-563, Mar. 2017.
- [17] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Elsevier, 1998.
- [18] O. P. Agrawal and D. Baleanu, "A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems," *J. of Vibration and Control*, vol. 13, no. 9-10, pp. 1269-1281, 2007.
- [19] R. L. Burden, J. D. Faires, and A. Reynolds, *Numerical Analysis Prindle, Weber & Schmidt*, pp. 28-34, 1985.
- [20] H. Banks and J. Burns, "Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximations," *SIAM J. on Control Optimization*, vol. 16, no. 2, pp. 169-208, 1978.
- [21] A. Jajarmi and D. Baleanu, "Suboptimal control of fractional-order dynamic systems with delay argument," *J. of Vibration and Control*, vol. 24, no. 12, pp. 2430-2446, 2017.
- [22] L. Moradi, F. Mohammadi, and D. Baleanu, "A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets," *J. of Vibration and Control*, vol. 25, no. 2, pp. 310-324, 2019.
- [23] S. Sabermahani, Y. Ordokhani, and S. A. Yousefi, "Fractional-order Lagrange polynomials: an application for solving delay fractional

جدول ۹: مقایسه شاخص عملکرد با روش‌های مختلف برای مثال ۳.

روش حل مسأله	مقدار تابع هدف J
[۳۰]	۰٫۱۷۳۹۱۸
[۲۹]	۰٫۱۷۳۹۶۸
[۳۱]	۱۷۳۹۲۹۰
[۳۲]	۱۷۳۹۴۶۰
Present method ($h=۰٫۰۰۰۵$)	۰٫۱۶۲۴

محاسبات روش پیشنهادی کمتر از روش [۲۹] تا [۳۲] بوده، دقت پاسخ نیز افزایش یافته است. علاوه بر این در شکل ۴، توابع حالت و کنترل بر حسب زمان به ازای مقادیر مختلف h رسم شده است. با بررسی انجام‌شده بین نتایج شبیه‌سازی در شکل ۴ با شکل‌های [۲۹] تا [۳۲] مشاهده می‌شود که مطابقت خوبی با هم دارند. بنابراین روش پیشنهادی در مقایسه با نگرش [۲۹] تا [۳۲] از دقت کافی برخوردار بوده و در عین حال از لحاظ محاسباتی بسیار ساده‌تر است و باعث افزایش سرعت رسیدن به پاسخ و کاهش زمان پردازش می‌گردد.

تبصره ۴

نویسندگان [۳۰] یک روش عددی مبتنی بر چندجمله‌ای برنشتاین را برای حل سیستم‌های کنترل بهینه با تأخیرهای ثابت ارائه داده‌اند. مرجع [۲۹]، منحنی‌های Bezier را برای حل مسأله کنترل بهینه با تأخیر پانتوگراف پیشنهاد داده است. در [۳۱] از یک روش عددی جایگزین برای حل مسأله کنترل بهینه درجه دوم خطی با استفاده از موجک‌های لژاندر استفاده شده است. در [۳۲] روش عددی جایگزینی برای حل مسأله کنترل بهینه درجه دوم خطی با استفاده از موجک چیبیشف ارائه شده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مسأله کنترل بهینه با تأخیر زمانی در نظر گرفته شده است. با استفاده از اصل حداکثر پونتریاگین برای مسائل کنترل بهینه با تأخیر زمانی، شرایط بهینه لازم را برای این مسأله به‌دست می‌آوریم و سپس الگوریتمی جدید برای حل عددی آن ارائه می‌دهیم. این الگوریتم بر پایه تقریب مشتق و درون‌یابی خطی برای جملات تأخیر است.

با استفاده از این روش، مسأله مورد بررسی به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تبدیل شده که حل آن بسیار ساده‌تر از مسأله اصلی است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهند که روش برنامه‌ریزی خطی مبتنی بر ترکیب تقریب مشتق و گسسته‌سازی درون‌یابی خطی، علاوه بر اینکه کارآمد، مؤثر و دقیق است در عین حال ساده نیز می‌باشد و برخلاف سایر روش‌های ارائه‌شده از پیچیدگی و حجم کمتری از محاسبات برخوردار است؛ به همین دلیل زمان پردازش کمتری دارد. با وجود این در دقت‌های بسیار بالا و افزایش تکرار الگوریتم پیشنهادی، زمان محاسبات افزایش می‌یابد و لازم است در حل مسائلی که محدودیت زمان اهمیت دارد با توجه به دقت پاسخ، محدودیت‌هایی برای تکرار الگوریتم در نظر گرفت. در بخش تعمیم مسأله که در بخش ۳ گزارش شده است، حل مسائل کنترل بهینه تأخیری با وجود مشتقات کسری که در تعدادی از روش‌ها امکان‌پذیر نیست به سهولت ممکن می‌شود و یکی از ویژگی‌های مهم این روش است. در انتها با ذکر مثال، اثربخشی و کارایی روش پیشنهادی را نشان داده‌ایم.

در کارهای آینده سعی خواهیم کرد روش جدید ارائه‌شده در این مقاله را در مسائل کاربردی پیچیده‌تری استفاده نماییم. همچنین در نظر داریم این روش را برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری که در قسمت

مهدی یوسفی طبری تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی برق به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۳ و ۱۳۹۱ در دانشگاه آزاد اسلامی به پایان رسانده است. وی در حال حاضر دانشجوی دوره دکتری مهندسی برق در دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل است. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: کنترل بهینه، سیستم‌های مرتبه کسری و سیستم‌های تاخیری.

زهرا رحمانی در سال ۱۳۷۷ مدرک کارشناسی مهندسی برق خود را از دانشگاه صنعتی شریف تهران و به ترتیب در سال ۱۳۷۹ مدرک کارشناسی ارشد و در سال ۱۳۸۶ دکتری مهندسی برق خود را از دانشگاه علم و صنعت ایران دریافت نمود. از سال ۱۳۸۷ به‌عنوان عضو هیأت علمی گروه مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل مشغول به فعالیت گردید و اینک نیز دانشیار این دانشکده می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان متنوع بوده و شامل موضوعاتی مانند روش‌های هوشمند، سیستم‌های غیرخطی، پیچیده و ترکیبی است.

علی وحیدیان کامیاد تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضیات کاربردی به ترتیب در سال‌های ۱۳۴۸، ۱۳۵۲ از دانشگاه فردوسی مشهد و موسسه ریاضیات ایران به پایان رسانیده است. وی مدرک دکتری رشته ریاضیات کاربردی - کنترل خود را از دانشگاه لیدز انگلستان در سال ۱۳۶۷ اخذ نمود. ایشان استاد تمام دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی می‌باشند و زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: ریاضیات کاربردی، دینامیک کسری، کنترل بهینه، کاربردهای تئوری فازی، تئوری اندازه‌گیری و سیستم‌های کنترلی است.

سید جلیل ساداتی رستمی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی برق گرایش کنترل به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۱، ۱۳۸۴ و ۱۳۹۱ از دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و فردوسی مشهد و دانشگاه مازندران به پایان رسانده است و هم‌اکنون استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: کنترل سیستم‌های مرتبه کسری، کنترل سیستم‌های دارای تاخیر، کنترل غیرخطی، کنترل مدل پیش‌بین، کنترل یادگیر تکرار شونده و یادگیری تقویتی.

optimal control problems," *Trans. of the Institute of Measurement and Control*, vol. 41, no. 11, pp. 2997-3009, 2019.

- [24] H. R. Marzban and F. Malakoutikhah, "Solution of delay fractional optimal control problems using a hybrid of block-pulse functions and orthonormal Taylor polynomials," *J. of the Franklin Institute*, vol. 356, no. 15, pp. 8182-8215, Oct. 2019.
- [25] N. Haddadi, Y. Ordokhani, and M. Razzaghi, "Optimal control of delay systems by using a hybrid functions approximation," *J. of Optimization Theory and Applications*, vol. 153, no. 2, pp. 338-356, 12 Oct. 2012.
- [26] K. Palanisamy, K. Balachandran, and R. Ramasamy, "Optimal control of linear time-varying delay systems via single-term Walsh series," *IEE Proc. D-Control Theory and Applications*, vol. 135, no. 4, pp. 332-332, Jul. 1988.
- [27] S. Dadebo and R. Luus, "Optimal control of time-delay systems by dynamic programming," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 13, no. 1, pp. 29-41, Jan./Mar. 1992.
- [28] J. R. Ockendon and A. B. Tayler, "The dynamics of a current collection system for an electric locomotive," *Proc. of the Royal Society A: Mathematical Physical Sciences*, vol. 322, no. 1551, pp. 447-468, 4 May 1971. 1971.
- [29] F. Ghomanjani, M. H. Farahi, and A. V. Kamyad, "Numerical solution of some linear optimal control systems with pantograph delays," *IMA J. of Mathematical Control and Information*, vol. 32, no. 2, pp. 225-243, Jun. 2015.
- [30] N. Ghaderi and M. H. Farahi, "The numerical solution of some optimal control systems with constant and pantograph delays via bernstein polynomials," *Iranian J. of Mathematical Sciences Informatics*, vol. 15, no. 2, pp. 163-181, 2020.
- [31] M. Fatehi, M. Vali, and M. Samavat, "State analysis and optimal control of linear time-invariant scale systems using the legendre wavelets," *Canadian J. on Automation, Control & Intelligent Systems*, vol. 3, no. 1, pp. 1-7, May 2012.
- [32] M. Fatehi, M. Samavat, M. Vali, and F. Khaleghi, "State analysis and optimal control of linear time-invariant scaled systems using the Chebyshev wavelets," *Contemporary Engineering Sciences*, vol. 5, no. 2, pp. 91-105, 2012.