

تحلیل جبری پایداری و بررسی امکان وجود کنترل کننده تناسبی جهت پایداری: وجود نقطه عطف بحرانی در دیاگرام فاز

خشایار نشاط و محمد صالح تواضی

پایداری سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان پرداخته شده است. شایان ذکر است نتایج موجود در زمینه تحلیل جبری پایداری در تعیین نواحی پایداری و پایداری مقاوم در فضای پارامترهای آزاد کنترل کننده [۱۴] و [۱۵]، طراحی اندازه‌گیری- مبنای سیستم‌های کنترلی [۱۶] و [۱۷] و طراحی مدل- آزاد^۱ کنترل کننده [۱۸] و [۱۹] نیز دارای کاربردهای فراوانی می‌باشد.

در این مقاله در ابتدا به بیان برخی از نتایج ارائه شده توسط [۱۲] و [۱۳] در زمینه تحلیل پایداری و تعیین جبری تعداد قطب‌های ناپایدار در سیستم حلقه بسته بر اساس دیاگرام Bode سیستم حلقه باز پرداخته می‌شود. سپس به بررسی یک حالت مورد توجه قرار نگرفته در استخراج نتایج [۱۲] و [۱۳] پرداخته شده و نتایج تکمیلی که این حالت را نیز در بر می‌گیرند، ارائه خواهد شد. در واقع مقاله پیش رو به صورت تحلیلی به اصلاح نتایج [۱۲] و [۱۳] در حالت خاص وجود نقطه عطف بحرانی در دیاگرام فاز می‌پردازد. در انتها نیز با مثال‌هایی کارایی نتایج به دست آمده مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

ساختار مقاله در ادامه بدین شرح است. بخش دوم مقاله شامل باز بیان برخی از نمادها، تعاریف و نتایج از [۱۲] و [۱۳] می‌باشد. در بخش سوم مقاله، به منظور روشن ساختن هدف از انجام تحقیق، به بیان حالتی پرداخته می‌شود که در استخراج نتایج [۱۲] و [۱۳] مورد توجه قرار نگرفته است. در بخش چهارم مقاله با بازنگری نتایج مقالات مذکور، نتایج تکمیلی که حالت مورد توجه نشده را نیز در بر می‌گیرند، ارائه خواهد شد. در بخش پنجم مقاله، به صورت تحلیلی دسته‌ای از سیستم‌ها که در استخراج نتایج [۱۲] و [۱۳] مورد توجه قرار نگرفته‌اند، معرفی می‌شوند. در بخش نهایی مقاله نیز به نتیجه‌گیری پرداخته خواهد شد.

۲- پیش‌نیازها

در این بخش به برخی از تعاریف و نتایج مرتبط که در [۱۲] و [۱۳] آمده است اشاره می‌شود.

را به عنوان پاسخ فرکانسی حلقه باز سیستم کنترلی شکل ۱ در نظر بگیرید. مجموعه $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}\}$ را که در آن

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_k < \omega_{k+1} = \infty \quad (1)$$

است به عنوان مجموعه جواب‌های (۲) در $\omega \in [0, \infty)$ تعریف می‌کنیم

$$\angle G_{ol}(j\omega) = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (2)$$

که در این رابطه $\omega = 0$ و $\omega_{k+1} = \infty$ به شرطی در این مجموعه قرار خواهند گرفت که جواب‌هایی برای (۲) باشند و در غیر این صورت، مجموعه Ω را بدون این اعضا در نظر می‌گیریم. همچنین متناظر

چکیده: این مقاله به مسأله تحلیل جبری پایداری و بررسی امکان وجود کنترل کننده تناسبی جهت پایداری بر اساس اطلاعات پاسخ فرکانسی می‌پردازد. در ابتدا نشان داده خواهد شد که استفاده از نتایج موجود در این زمینه در حالت خاصی که دیاگرام فاز سیستم حلقه باز در مسأله تحلیل جبری پایداری یا دیاگرام فاز پروسه در مسأله پایداری به کمک کنترل کننده‌های تناسبی دارای نقطه عطف بحرانی است، می‌تواند منجر به برداشت‌هایی ناسازگار شود. سپس برای حل مشکل ناسازگاری ذکر شده، اصلاحاتی پیشنهاد خواهد شد. در نهایت نیز به صورت تحلیلی شرایطی برای وجود نقطه عطف بحرانی در دیاگرام فاز یک سیستم دینامیکی استخراج می‌شود.

کلیدواژه: روش‌های جبری در تحلیل پایداری، پایداری تناسبی، پاسخ فرکانسی.

۱- مقدمه

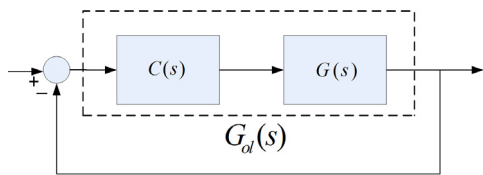
بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده به منظور پایداری سیستم‌های دینامیکی از مسایل پرکاربرد و مهم در مهندسی کنترل می‌باشند. از آنجا که به دلیل پیچیدگی‌های ذاتی بسیاری از پروسه‌های واقعی با مدل‌های پارامتریک (مدل‌های تحلیلی) قابل مدل‌سازی نیستند، استفاده از روش‌های مبتنی بر پاسخ فرکانسی (مدل غیر پارامتریک) برای تحلیل پایداری و پایداری سیستم‌های دینامیکی امری متداول بوده و تاکنون روش‌های زیادی در این زمینه معرفی شده‌اند [۱] تا [۵]. به طور نمونه در [۶] به مسأله طراحی کنترل کننده‌های دارای سه پارامتر قابل تنظیم بر اساس پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز و بدون در دست داشتن مدل تحلیلی پرداخته شده است. در [۷] بر اساس روش نایکویست، نواحی پایداری در فضای پارامترهای کنترل کننده PID به دست آمده است. مقالات [۸] و [۹] نیز به طراحی کنترل کننده‌های PID برای سیستم‌های تأخیردار در حوزه زمان پرداخته‌اند. همچنین در [۱۰] خصوصیات فاز چندجمله‌ای‌های هرویتز مورد بررسی قرار گرفته شده است. از دیگر کارهای انجام شده می‌توان به [۱۱] اشاره نمود که در آن با توجه به پاسخ فرکانسی پروسه و پاسخ فرکانسی به دست آمده از مدل مطلوب به بهینه‌سازی پارامترهای کنترل کننده پرداخته شده است. همچنین [۱۲] معیاری جبری با توجه به دیاگرام Bode سیستم حلقه باز برای به دست آوردن تعداد قطب‌های ناپایدار سیستم حلقه بسته ارائه کرده است. در [۱۳] نیز بر اساس نتایج [۱۲] به طراحی کنترل کننده‌های خطی جهت

این مقاله در تاریخ ۱۶ آبان ماه ۱۳۹۶ دریافت و در تاریخ ۲۵ اردیبهشت ماه ۱۳۹۷ بازنگری شد.

خشایار نشاط، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران، (email: khashayar.neshat@ee.sharif.edu)

محمد صالح تواضی (نویسنده مسئول)، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران، (email: tavazoei@sharif.edu)

1. Measurement-Based
2. Free-Model Design



شکل ۱: بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته.

$$\max \sum_{t=1}^m \bar{i}_t = P \tag{۹}$$

که در آن P تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی $G(s)$ بوده و دنباله $I = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_k\}$ تعریف شده بر اساس (۷) و (۸) متناظر با مجموعه $\bar{\Omega}$ تعریف می‌شود [۱۳]. همان گونه که با برقراری شرط (۹) کنترل کننده تناسبی با بهره مثبت $C(s) = k > 0$ می‌تواند باعث پایداری سیستم حلقه بسته می‌شود، مشابهاً اگر به جای $G^{-1}(j\omega)$ در (۷) و (۸)، $-G^{-1}(j\omega)$ قرار گیرد، آن گاه شرط (۹) شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم حلقه بسته با کنترل کننده تناسبی با بهره منفی $C(s) = k' < 0$ خواهد بود.

۳- عدم صحت نتایج در یک حالت خاص

در این بخش به بیان نقصانی که در نتایج [۱۲] و [۱۳] وجود دارد خواهیم پرداخت. همان طور که در بخش قبل ملاحظه شد در تعاریف (۳)، (۷) و (۸) برای به دست آوردن i_t به تغییرات فاز بر حسب فرکانس در نقاطی که فاز ضریبی از π می‌باشد نیاز داریم. در [۱۲] طبق (۳) به این موضوع اشاره شده که اگر $\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} = 0$ باشد، i_t متناظر با ω_t برابر صفر می‌شود. اما استفاده از این تعریف برای نتیجه‌گیری شرط (۴) هنگامی درست است که در نمودار $\angle G_{ol}(j\omega)$ بر حسب ω ، $\omega = \omega_t$ مشخص کننده نقطه ماکسیمم یا مینیمم باشد. در غیر این صورت اگر این فرکانس، نقطه عطفی را مشخص کند، دیگر از تعریف (۳) برای نتیجه‌گیری شرط (۴) نمی‌توان استفاده نمود. این موضوع در مورد نتیجه [۱۳] نیز صادق می‌باشد، چرا که در تعاریف (۷) و (۸) برای نتیجه‌گیری شرط (۹) زمانی $i_t = 0$ باید در نظر گرفته شود که $\frac{d}{d\omega} \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} = 0$ بوده و علاوه بر آن $\omega = \omega_t$ مشخص کننده نقطه عطف نمودار $\angle G(j\omega)$ بر حسب ω نباشد. برای روشن تر شدن موضوع به بیان دو مثال می‌پردازیم که در مثال اول به دلیل این که نقطه مورد نظر نقطه عطف نمی‌باشد از (۳)، (۷) و (۸) برای نتیجه‌گیری شرایط (۴) و (۹) به درستی می‌توان استفاده نمود. اما در مثال دوم به دلیل این که نقطه مورد نظر نقطه عطف نمودار $\angle G(j\omega)$ بر حسب ω است، شرایط پایداری (۴) یا پایداری (۹) با استفاده از تعاریف (۳)، (۷) و (۸) صحیح نمی‌باشند.

مثال ۱: فرض کنید تابع تبدیل توصیف کننده پروسه در سیستم کنترلی شکل ۱ برابر (۱۰) باشد

$$G(s) = \frac{4s^2 + 4s}{s^2 + s^2 - s + 1} \tag{۱۰}$$

در این صورت، پروسه دارای دو قطب سمت راست محور موهومی بوده و چون معادله مشخصه سیستم حلقه بسته با فرض $C(s) = 1$ برابر $\Delta(s) = s^2 + 5s^2 + 3s + 1$ است، سیستم حلقه بسته با کنترل کننده $C(s) = 1$ نیز شامل دو قطب ناپایدار می‌باشد. حال به بررسی موضوع با استفاده از نتایج بیان شده در بخش ۲ پرداخته می‌شود. با توجه به دیاگرام Bode تابع تبدیل (۱۰) که در شکل ۲ آمده است، داریم $\Omega = \{1, \infty\}$ با

با این مجموعه، دنباله $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}\}$ را چنین تعریف می‌کنیم $(\omega_t \in \Omega, t = 1, \dots, k+1)$

$$i_t = \begin{cases} \cdot & \text{if } |G_{ol}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} < \cdot \\ \text{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\right) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{۳}$$

تابع $\text{sgn}(\cdot)$ در (۳)، اینچنین تعریف می‌شود

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > \cdot \\ \cdot & x = \cdot \\ -1 & x < \cdot \end{cases}$$

شایان ذکر است که اگر $\omega_t, \omega_{k+1} \notin \Omega$ باشد، i_t و i_{k+1} برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند. اگر $G_{ol}(s)$ قطبی روی محور موهومی نداشته باشد، داریم [۱۲]

$$Z - P = N = -(i_1 + \sum_{t=1}^k i_t + i_{k+1}) \tag{۴}$$

در (۴)، Z بیانگر تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی سیستم حلقه بسته، P تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی سیستم حلقه باز و N بیانگر تعداد دوران ساعتگرد منحنی نایکوئیست سیستم حلقه باز حول نقطه $-1 + j0$ می‌باشد به شرط آن که $G_{ol}(s)$ قطبی روی محور موهومی نداشته باشد (برای حالتی که $G_{ol}(s)$ دارای قطب روی محور موهومی است می‌توان نسخه کامل تر (۴) را در [۱۲] مشاهده کرد). همچنین مشابه [۱۳] با توجه به سیستم کنترلی شکل ۱ مجموعه $\bar{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ به عنوان مجموعه جواب‌های معادله

$$\angle G^{-1}(j\omega) \pm n\pi = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots \tag{۵}$$

با فرض

$$|G^{-1}(j\omega_1)| < |G^{-1}(j\omega_2)| < \dots < |G^{-1}(j\omega_k)| \tag{۶}$$

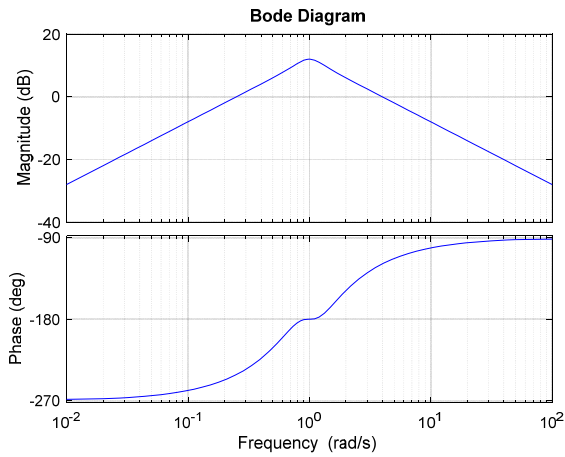
در بازه $\omega \in [0, \infty]$ تعریف می‌شود. همچنین برای $\omega_t \neq 0$ و $\omega_t \neq \infty$ تعریف می‌کنیم

$$\bar{i}_t = \begin{cases} +2 & \text{if } \frac{d}{d\omega} \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} < \cdot \\ \cdot & \text{if } \frac{d}{d\omega} \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} = \cdot \\ -2 & \text{if } \frac{d}{d\omega} \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} > \cdot \end{cases} \tag{۷}$$

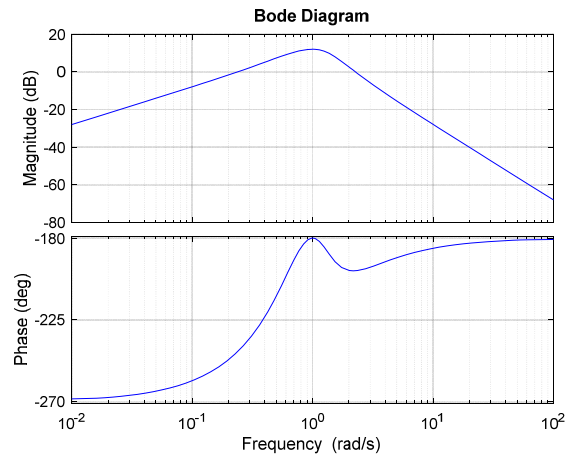
علاوه بر آن، به شرط قرارگیری در مجموعه $\bar{\Omega}$ برای $\omega_t = 0$ یا $\omega_t = \infty$ نیز i_t چنین تعریف می‌شود

$$\bar{i}_t = \begin{cases} +1 & \text{if } \frac{d}{d\omega} \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} < \cdot \\ \cdot & \text{if } \frac{d}{d\omega} \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} = \cdot \\ -1 & \text{if } \frac{d}{d\omega} \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} > \cdot \end{cases} \tag{۸}$$

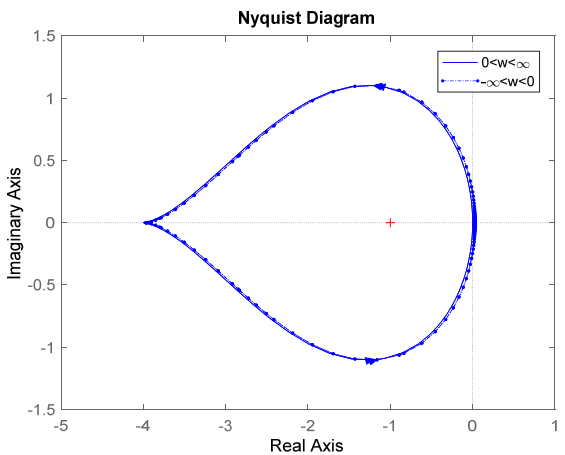
در حالتی که $G(s)$ قطبی روی محور موهومی نداشته باشد، در سیستم کنترلی شکل ۱ می‌توان از کنترل کننده تناسبی $C(s) = k > 0$ جهت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته استفاده نمود اگر و فقط اگر برای حداقل یکی از مقادیر $m = 1, \dots, k$ داشته باشیم



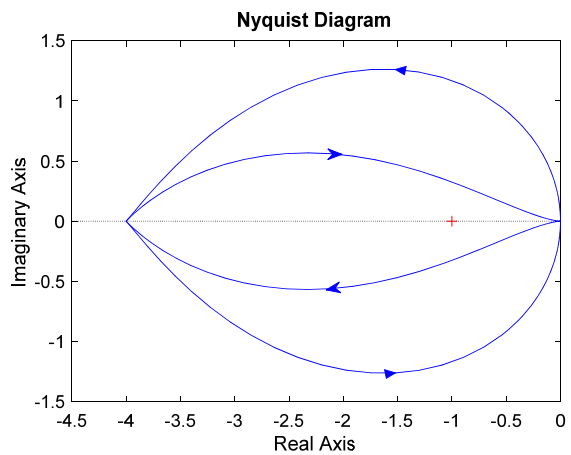
شکل ۴: دیاگرام Bode تابع تبدیل (۱۳).



شکل ۲: دیاگرام Bode تابع تبدیل (۱۰).



شکل ۵: دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل (۱۳).



شکل ۳: دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل (۱۰).

که در این صورت، سیستم حلقه باز دارای دو قطب سمت راست محور موهومی بوده و استفاده از کنترل کننده تناسبی $C(s) = 1$ برای کنترل آن منجر به سیستم حلقه بسته‌ای با معادله مشخص سیستم حلقه بسته هیچ قطبی سمت راست محور موهومی ندارد. حال به بررسی این موارد با استفاده از نتایج ذکر شده در بخش ۲ می‌پردازیم. با توجه به دیاگرام Bode تابع تبدیل (۱۳) که در شکل ۴ رسم شده است، با فرض $C(s) = 1$ در $\omega = 1$ ، $G_{ol}(j\omega) = G(j\omega) = \pi$ ، $|G_{ol}(j\omega)| > 1$ و $\Omega = \{1\}$ و از آنجا که $d/d\omega \angle G_{ol}(j\omega)|_{\omega=1} = 0$ نتیجه می‌شود که سیستم حلقه بسته ذکر شده بایستی دارای دو قطب ناپایدار باشد. در صورتی که این نتیجه صحیح نیست چرا که همان گونه که ذکر شد تمام ریشه‌های معادله مشخص سیستم حلقه بسته سمت چپ محور موهومی قرار دارند. همچنین نتیجه شرط (۹) نیز در این مثال در تناقض با واقعیت است، چرا که در این مثال داریم $\Omega = \{1\}$ که نتیجه می‌دهد شرط (۹) نمی‌تواند برقرار باشد. بر اساس نتایج [۱۳] این بدان معناست که سیستم توصیف شده با تابع تبدیل (۱۳) را نمی‌توان با کنترل کننده تناسبی $C(s) = k > 0$ پایدار نمود. اما این گزاره صحیح نیست و دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل (۱۳) که در شکل ۵ رسم شده است این موضوع را تأیید می‌نماید.

۴- اصلاح نتایج

در این بخش به اصلاح عدم تطابق مورد بحث در بخش قبل پرداخته

فرض $C(s) = 1$ از آنجا که $|G_{ol}(j\omega)| < 1$ طبق (۳) اندیس متناظر با $\omega = \infty$ صفر می‌باشد $(i_r = 0)$ و همچنین چون $|G_{ol}(j\omega)| > 1$ و $d/d\omega \angle G_{ol}(j\omega)|_{\omega=1} = 0$ نیز طبق تعریف (۳) صفر خواهد بود $(i_l = 0)$. همچنین چون $\Omega = 0 \neq \infty$ ، آنگاه $i_i = 0$ می‌باشد. در نتیجه

$$i_l + 2i_i + i_r = 0 \tag{11}$$

و طبق انتظار شرط پایداری (۴) برقرار نیست (ناپایداری سیستم حلقه بسته با دو قطب ناپایدار). همچنین با استفاده از کنترل کننده تناسبی $C(s) = k > 0$ نیز نمی‌توان باعث پایداری شدن سیستم حلقه بسته شد (این مسأله به راحتی با در نظر گرفتن دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل (۱۰) که در شکل ۳ رسم شده قابل تحقیق است). به منظور تأیید موضوع با استفاده از نتیجه بیان شده در بخش ۲، توجه نمایید که در این مثال $i_l = 0$ و به دلیل $d/d\omega \angle G^{-1}(j\omega)|_{\omega=\infty} < 0$ ، $i_r = +1$ است. در نتیجه

$$\sum_{i=1}^m i_i \neq 2, m = 0, 1 \tag{12}$$

و شرط (۹) به عنوان شرط لازم و کافی پایداری با کنترل کننده تناسبی $C(s) = k > 0$ برقرار نمی‌باشد.

مثال ۲: فرض کنید تابع تبدیل پروسه در سیستم کنترلی شکل ۱ برابر (۱۳) است

$$G(s) = \frac{4s^3 + 4s^2 + 4s}{s^4 - s^3 + s^2 - s + 1} \tag{13}$$

خواهد بود. ■

در بخش ۳ مقاله مشاهده شد که نتایج باز بیان شده در بخش ۲ منجر به ارائه تحلیل صحیحی در خصوص پایداری و پایداری سیستم در نظر گرفته شده در مثال ۲ نمی‌شود. از این رو با توجه به قضایای ۱ و ۲ مجدداً به بررسی مثال ۲ می‌پردازیم. با توجه به شکل ۴ تنها در $\omega = 1$ منحنی فاز سیستم در نظر گرفته شده در مثال ۲ (سیستم (۱۳)) از مقدار π عبور می‌کند که نتیجه می‌دهد $\Omega = \{1\}$. همچنین در این فرکانس $d/d\omega \angle G(j\omega) = 0$ می‌باشد. با فرض $C(s) = 1$ ، طبق (۱۴) i_t متناظر با فرکانس $\omega = 1$ برابر یک می‌باشد ($i_t = 1$). همچنین چون در این مثال $\omega = 0 \notin \Omega$ و $\omega_t = \infty \notin \Omega$ آن گاه $i_t = i_r = 0$. در نتیجه طبق (۴) داریم $Z - P = N = -(0 + 2 + 0) = -2$ (معادل با پایداری سیستم (۱۳) با کنترل کننده تناسبی $C(s) = 1$) که صحت این موضوع توسط شکل ۵ نیز تأیید می‌گردد. همچنین با توجه به (۱۶) در قضیه ۲ داریم $\bar{i}_t = 2$ و از طرفی می‌دانیم $G(s)$ دو قطب سمت راست محور موهومی دارد ($P = 2$). در نتیجه طبق شرط (۹) درمی‌یابیم که طبق انتظار با استفاده از کنترل کننده $C(s) = k$ می‌توان باعث پایداری سیستم حلقه بسته شد.

۵- شرایط وجود نقطه عطف بحرانی در دیاگرام فاز

در این بخش به صورت تحلیلی به معرفی دسته‌ای از سیستم‌ها که مسأله پایداری و پایداری آنها بر اساس نتایج [۱۲] و [۱۳] قابل ارزیابی نیست، پرداخته می‌شود (برای تحلیل جبری پایداری و پایداری تناسبی این دسته از سیستم‌ها نتایج اصلاح شده بخش ۴ مقاله قابل استفاده خواهند بود). به این منظور در این بخش برای وجود نقطه عطف در دیاگرام فاز در فرکانس صدق کننده در (۵)، شرایطی جبری استخراج خواهد شد. در ابتدا چند لم مقدماتی ارائه شده و در انتها سیستم‌های مذکور در قالب یک قضیه معرفی می‌گردند. به منظور اختصار در نوشتار، در این بخش $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ و $G(s) = N(s)/D(s)$ فرض شده که $N(s)$ و $D(s)$ چندجمله‌ای‌های نسبت به هم اولی می‌باشند. لم ۱: در دیاگرام فاز $G(s)$ ، نقطه (ϖ, π) نقطه عطف است اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} R(\varpi) < 0 \\ I(\varpi) = I'(\varpi) = I''(\varpi) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

اثبات: با توجه به تساوی $\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(I(\omega)/R(\omega))$ ، نتیجه ذکر شده بدیهی است. ■

می‌شود. بدین منظور در ابتدا تعریف (۳) به گونه‌ای اصلاح می‌شود که در حالت وجود نقاط عطف در دیاگرام فاز به عنوان جواب‌های (۲) همچنان بتوان از شرط پایداری (۴) بهره برد. این اصلاح در قالب قضیه ۱ صورت گرفته است.

قضیه ۱: $G_{ol}(j\omega)$ را پاسخ فرکانسی حلقه باز سیستم شکل ۱ در نظر بگیرید که بر اساس آن مجموعه $\Omega = \{\omega, \omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}\}$ مشابه بخش ۲ تعریف شده است. همچنین دنباله متناظر با این مجموعه را به صورت $I = \{i_t, i_1, \dots, i_k, i_{k+1}\}$ تعریف می‌کنیم به قسمی که (۱۴) برای $\omega_t \in \Omega, t = 0, 1, \dots, k, k+1$ در این صورت به فرض آن که $G_{ol}(s)$ قطبی روی محور موهومی نداشته باشد، تساوی (۴) برقرار است. اثبات: اثبات برای حالتی که هیچ کدام از اعضای محدود و غیر صفر مجموعه Ω نقطه عطف در دیاگرام فاز نمی‌باشند، در [۱۲] آمده است. اما اگر $\omega = \omega_t \in \Omega$ نقطه عطف نمودار $\angle G_{ol}(j\omega)$ بر حسب ω باشد، آن گاه منحنی نایکویست $G_{ol}(j\omega)$ محور حقیقی را در بخش منفی آن قطع نموده و از ربعی به ربع دیگر می‌رود. در این حالت با وجود این که $d/d\omega \angle G_{ol}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} = 0$ است اما منحنی نایکویست $G_{ol}(j\omega)$ رفتاری مشابه با حالتی که $d/d\omega \angle G_{ol}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} \neq 0$ می‌باشد دارد. در تعریف (۱۴)، اندیس i_t متناظر با ω_t در حالت ذکر شده (وجود نقطه عطف بحرانی در دیاگرام فاز) به گونه‌ای تعریف شده که مقدار آن با حالت $d/d\omega \angle G_{ol}(j\omega)|_{\omega=\omega_t} \neq 0$ تفاوتی نداشته باشد. در بقیه حالت‌ها نیز تعریف (۱۴) معادل تعریف (۳) خواهد بود. لذا با تعریف جدید اندیس i_t در (۱۴) همچنان اثبات ارائه شده در [۱۲] معتبر است. ■

شایان ذکر است که (۱۴) در قضیه ۱ معادل با (۱۵) می‌باشد و در قضیه ۲ نیز تعاریف (۷) و (۸) به گونه‌ای اصلاح می‌شوند که با در نظر گرفتن آنها شرط پایداری پذیر (۹) همچنان معتبر باشد.

قضیه ۲: سیستم کنترلی شکل ۱ را در نظر بگیرید. مجموعه $\bar{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ را طریقی آنچه در بخش ۲ مطرح شد، تعریف می‌کنیم. همچنین متناظر با هر عضو این مجموعه مانند ω_t ، اندیس \bar{i}_t را برای $\omega_t \neq 0$ و $\omega_t \neq \infty$ طبق (۱۶) تعریف می‌کنیم و برای $\omega_t = 0$ و $\omega_t = \infty$ ، (۱۷) را داریم. حال با فرض آن که $G(s)$ قطبی روی محور موهومی نداشته باشد، در سیستم کنترلی شکل ۱ می‌توان از کنترل کننده $C(s) = k > 0$ جهت پایداری سیستم حلقه بسته استفاده نمود اگر و فقط اگر شرط (۹) برقرار باشد.

اثبات: ایده اثبات مشابه ایده به کار گرفته شده در اثبات قضیه ۱ برای اصلاح تعریف اندیس متناظر با فرکانس مربوط به نقطه عطف بحرانی در دیاگرام فاز $G(j\omega)$ می‌باشد. با جایگزینی تعاریف (۱۶) و (۱۷) به ترتیب با تعاریف (۷) و (۸) اثبات ارائه شده در [۱۳] برای قضیه ۲ معتبر

$$i_t = \begin{cases} \cdot & \text{if } |G_{ol}(j\omega)| < 1 \\ \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_t^+} \times \frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_t^-}\right)}{2} \times \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_t^+}\right) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

$$\bar{i}_t = \begin{cases} \cdot & \text{if } |G_{ol}(j\omega)| < 1 \\ \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(\left(|\angle G_{ol}(j\omega_t^+) - \pi\right| \times \left(|\angle G_{ol}(j\omega_t^-) - \pi\right|\right)}{2} \times \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_t^+}\right)}{2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

$$\bar{i}_t = \left(\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_t^+}\right) \times \frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_t^-}\right) - 1 \times \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_t^+}\right) \quad (16)$$

$$\bar{i}_t = \frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_1^*} \times \frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_1^*} - 1}{2} \times \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} \angle G_{ol}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_1^*}\right) \quad (17)$$

$$1) D(s) + N(s) = (s^\tau + \omega^\tau) f(s)$$

$$2) D(j\omega) = \tau k_r \omega^\tau f(j\omega)$$

$$3) D'(s)\Big|_{s=j\omega} = \tau k_r \omega^\tau f'(s)\Big|_{s=j\omega} + \quad (25)$$

$$j \frac{k_r}{k_r} (k_r - \tau k_r) f(j\omega)$$

آن گاه نقطه (ω, π) در دیاگرام فاز تابع تبدیل $kG(s)$ به ازای $k > 0$ یا $k < 0$ نقطه عطف خواهد بود.

اثبات: از شرط $D(s) + N(s) = (s^\tau + \omega^\tau) f(s)$ داریم

$$\begin{cases} D(s) + N(s) = \cdot \\ D'(s) + N'(s) = \tau s f'(s) \\ D''(s) + N''(s) = \tau f(s) + \tau s f'(s) \end{cases}, s = j\omega \quad (26)$$

با توجه به (۲۶) می‌توان نتیجه گرفت که از (۲۵)، (۲۷) منتج می‌شوند

$$\begin{cases} D(s) = -N(s) \\ D'(s) + N'(s) = \frac{-D(s)}{k_r s} \\ D(s) + k_r s^\tau (N''(s) + D''(s)) + \\ - \frac{k_r}{k_r} (\tau s D'(s) + D(s)) = \cdot \end{cases}, s = j\omega \quad (27)$$

روابط (۲۷) نیز روابط

$$\begin{cases} D(s) + N(s) = (s^\tau + \omega^\tau) f(s) \\ D^\tau(s) + k_r s (N'(s) D(s) - D'(s) N(s)) = \\ (s^\tau + \omega^\tau) g(s) \\ D^\tau(s) + k_r s^\tau (N''(s) D(s) - D''(s) N(s)) + \\ \tau k_r s^\tau D'(s) (N'(s) D(s) - D'(s) N(s)) + \\ k_r s D(s) (N'(s) D(s) - D'(s) N(s)) = \\ (s^\tau + \omega^\tau) h(s) \end{cases} \quad (28)$$

را نتیجه می‌دهند که در آنها $g(s)$ و $h(s)$ چندجمله‌ای‌های دلخواهی می‌باشند. با توجه به لم ۲ و نکته‌های ۳ و ۴، اگر (۲۸) برقرار باشد آن گاه

$$I(\omega) = I'(\omega) = I''(\omega) = \cdot \quad (29)$$

در نتیجه برقراری (۲۵)، برقراری (۲۹) را نتیجه می‌دهد. حال با توجه به لم ۱ اگر $R(\omega) < 0$ باشد، برقراری (۲۵) موجب می‌شود که در دیاگرام فاز $kG(s)$ به ازای $k > 0$ نقطه (ω, π) نقطه عطف باشد. همچنین اگر $R(\omega) > 0$ باشد، برقراری (۲۵) سبب می‌شود که به ازای $k < 0$ نقطه (ω, π) در دیاگرام فاز $kG(s)$ نقطه عطف باشد. ■

در مثال ۳ با استفاده از قضیه ۳ یک مجموعه خاص از توابع تبدیلی با نقطه عطف (ω, π) در دیاگرام فاز معرفی می‌شود.

مثال ۳: فرض کنید $f(s) = s^\tau + ps + q$ باشد که q و p پارامترهای آزادی هستند و همچنین $k_r = k_r = 1$ در نظر گرفته شده است. علاوه بر آن، فرکانس متناظر با نقطه عطف در دیاگرام فاز برابر $\omega = 1$ انتخاب شده است. در این شرایط با توجه به (۲۵) داریم

لم ۲: $I(\omega) = 0$ اگر و فقط اگر k وجود داشته باشد به قسمی که

$$D(s) + kN(s) = (s^\tau + \omega^\tau) f(s) \quad (19)$$

که در آن $f(s)$ یک چندجمله‌ای دلخواه می‌باشد.

اثبات: $I(\omega) = 0$ است اگر و فقط اگر مکان هندسی صفرهای $1 + kG(s)$ به ازای تغییرات k از نقطه $s = \pm j\omega$ عبور کند. این شرط بدان معناست که k یافت شود به قسمی که $s = \pm j\omega$ ریشه‌ای برای $D(s) + kN(s)$ باشد یا معادلاً $D(s) + kN(s) = (s^\tau + \omega^\tau) f(s)$. ■
نکته ۱: با توجه به لم ۲ اگر $I(\omega) = 0$ باشد، آن گاه k وجود دارد به نحوی که تساوی‌های زیر برقرار باشند ($f(s)$ یک چندجمله‌ای است)

$$\begin{cases} D(s) + kN(s) = \cdot \\ D'(s) + kN'(s) = \tau s f'(s) \\ D''(s) + kN''(s) = \tau f(s) + \tau s f'(s) \end{cases} \text{ for } s = j\omega \quad (20)$$

لم ۳: با فرض $\omega > 0$ ، $I'(\omega) = 0$ است اگر و فقط اگر مکان هندسی صفرهای $1 + ksG'(s)$ به ازای تغییرات k از نقطه $s = \pm j\omega$ عبور کند.

اثبات: با در نظر گرفتن تساوی (۲۱) که (۲۲) را نتیجه می‌دهد

$$\frac{dG(s)}{d\omega}\Big|_{s=j\omega} = \frac{dG(s)}{ds}\Big|_{s=j\omega} \cdot \frac{ds}{d\omega} = j \frac{dG(s)}{ds}\Big|_{s=j\omega} \quad (21)$$

$$s \frac{dG(s)}{ds}\Big|_{s=j\omega} = \omega R'(\omega) + j\omega I'(\omega) \quad (22)$$

لم اثبات می‌شود. ■

نکته ۲: مشابه لم ۳ می‌توان نشان داد اگر $I''(\omega) = 0$ ($\omega > 0$) باشد، آن گاه مکان هندسی صفرهای $(sG'(s))'$ به ازای تغییرات k از نقطه $s = \pm j\omega$ عبور می‌کند.

نکته ۳: از لم ۳ و با روندی همانند اثبات لم ۲، نتیجه می‌شود $I'(\omega) = 0$ اگر و فقط اگر k_r وجود داشته باشد به قسمی که

$$D^\tau(s) + k_r s (N'(s) D(s) - D'(s) N(s)) = (s^\tau + \omega^\tau) g(s) \quad (23)$$

که در آن $g(s)$ یک چندجمله‌ای است.

نکته ۴: با توجه به نکته ۲ و لم ۲ می‌توان نتیجه گرفت $I''(\omega) = 0$ ($\omega > 0$) است اگر و فقط k_r وجود داشته باشد به نحوی که

$$\begin{aligned} & D^\tau(s) + k_r s^\tau (N''(s) D(s) - D''(s) N(s)) + \\ & \tau k_r s^\tau D'(s) (N'(s) D(s) - D'(s) N(s)) + \\ & k_r s D(s) (N'(s) D(s) - D'(s) N(s)) = (s^\tau + \omega^\tau) h(s) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن $h(s)$ یک چندجمله‌ای است.

حال بر اساس لم‌ها و نکات ذکرشده، در قضیه زیر کلاسی از توابع تبدیل معرفی می‌شوند که نقطه (ω, π) در دیاگرام فاز آنها یک نقطه عطف است.

قضیه ۳: اگر چندجمله‌ای $f(s)$ و مقادیر ثابت و مثبت k_r و k_r وجود داشته باشند به طوری که

۶- جمع بندی

در ابتدای مقاله نشان داده شد در حالتی که دیاگرام فاز تابع تبدیل حلقه باز دارای نقطه عطف بحرانی باشد استفاده از نتایج [۱۲] در تحلیل پایداری سیستم کنترلی یا در حالتی که دیاگرام فاز تابع تبدیل پروسه دارای نقطه عطف بحرانی باشد استفاده از نتایج [۱۲] در پایداری با استفاده از کنترل کننده‌های تناسبی می‌تواند به نتایج نادرستی منجر شود. سپس اندیس‌های جبری تعریف شده در [۱۲] و [۱۳] به گونه‌ای اصلاح شدند که ناسازگاری ذکر شده در حل مسائل تحلیل پایداری و بررسی امکان وجود کنترل کننده تناسبی جهت پایداری با استفاده از نتایج مقالات ذکر شده رخ ندهد. در انتها نیز شرایط وجود نقطه عطف بحرانی در دیاگرام فاز به صورت تحلیلی استخراج شد.

مراجع

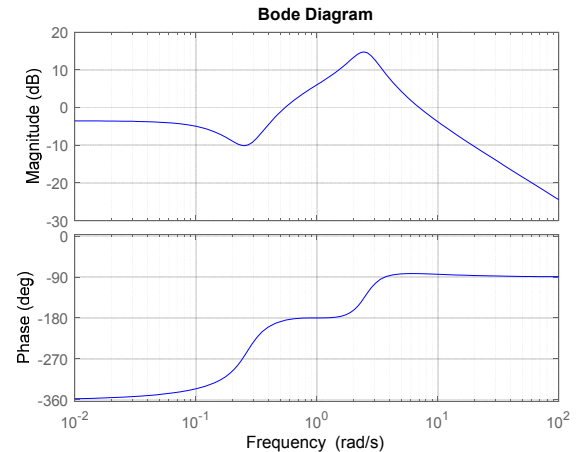
- [1] N. Sayyaf and M. S. Tavazoei, "Robust fractional-order compensation in the presence of uncertainty in a pole/zero of the plant," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 26, no. 3, pp. 797-812, May 2018.
- [2] Q. G. Wang, Z. Ye, and C. C. Hang, "Tuning of phase-lead compensators for exact gain and phase margins," *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 349-352, Feb. 2006.
- [3] N. Sayyaf and M. S. Tavazoei, "Desirably adjusting gain margin, phase margin, and corresponding crossover frequencies based on frequency data," *IEEE Trans. on Industrial Informatics*, vol. 13, no. 5, pp. 2311-2321, Oct. 2017.
- [4] F. Y. Wang, "The exact and unique solution for phase-lead and phase-lag compensation," *IEEE Trans. on Education*, vol. 46, no. 2, pp. 258-262, May 2003.
- [5] M. S. Tavazoei and M. Tavakoli-Kakhki, "Compensation by fractional-order phase-lead/lag compensators," *IET Control Theory and Appl.*, vol. 8, no. 5, pp. 319-329, 20 Mar. 2014.
- [6] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Controller synthesis free of analytical models: three term controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1353-1369, Jul. 2008.
- [7] B. Fang, "Computation of stabilizing PID gain regions based on the inverse Nyquist plot," *J. Process Control*, vol. 20, no. 10, pp. 1183-1187, Dec. 2010.
- [8] B. Fang, "Design of PID controllers for interval plants with time delay," *J. Process Control*, vol. 24, no. 10, pp. 1570-1578, Oct. 2014.
- [9] D. J. Wang, "A PID controller set of guaranteeing stability and gain and phase margins for time-delay systems," *J. Process Control*, vol. 22, no. 7, pp. 1298-1306, Jun. 2012.
- [10] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Phase properties of Hurwitz and Schur polynomial," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 5, pp. 733-735, May 1996.
- [11] S. Khadraoui, H. Nounou, M. Nounou, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "A control design method for unknown systems using frequency domain data," in *Proc. 9th Asian Control Conf. ASCC'13*, 6 pp., Istanbul, Turkey, 23-26 Jun. 2013.
- [12] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "A bode plot characterization of all stabilizing controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 55, no. 11, pp. 2650-2654, Nov. 2010.
- [13] N. Mohsenzadeh, S. Darbha, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Model-free synthesis of fixed structure stabilizing controllers using the rate of change of phase," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, no. 3, pp. 745-750, Mar. 2012.
- [14] E. Almodaresi and M. Bozorg, "kp-stable regions in the space of PID controller coefficients," *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, no. 10, pp. 1642-1647, 23 Jun. 2017.
- [15] E. Almodaresi and M. Bozorg, "kp-stable regions in the space of time delay and PI controller coefficients," *International J. of Control*, vol. 88, no. 3, pp. 653-662, Mar. 2015.
- [16] S. Khadraoui, H. N. Nounou, M. N. Nounou, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "A measurement-based approach for designing fixed-order controllers for unknown closed-loop architecture," *Asian J. of Control*, vol. 18, no. 2, pp. 686-698, Mar. 2016.
- [17] M. A. Fnaiech, et al., "A measurement-based approach for speed control of induction machines," *IEEE J. of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, vol. 2, no. 2, pp. 308-318, Jun. 2014.
- [18] S. Khadraoui, H. Nounou, M. Nounou, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "A model-free design of reduced-order controllers

$$\begin{aligned} ۱) D(s) + N(s) &= s^r + ps^r + (q+۱)s^r + ps + q \\ ۲) D(j) &= ۲(۱+q + jp) \\ ۳) D'(s)|_{s=j} &= ۳p + j(۱-q) \end{aligned} \quad (۳۰)$$

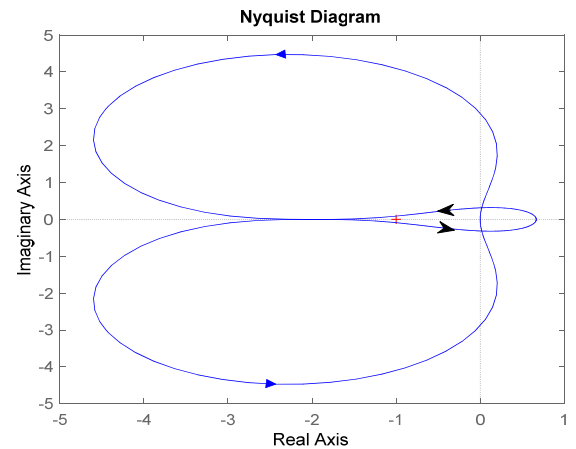
که چندجمله‌ای‌های زیر را نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} D(s) &= s^r - \frac{p}{۲} s^r + \frac{۹-q}{۲} s^r + \frac{۳p}{۲} s + \frac{۳q+۳}{۲} \\ N(s) &= \frac{۳p}{۲} s^r + \frac{۳q-۷}{۲} s^r - \frac{p}{۲} s - \frac{q+۳}{۲} \end{aligned} \quad (۳۱)$$

بنابراین طبق قضیه ۳، دیاگرام فاز تابع تبدیل



شکل ۶: دیاگرام Bode تابع تبدیل (۳۲) به ازای $k=۲$ و $p=۱$ ، $q=-۲$.



شکل ۷: دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل (۳۲) به ازای $k=۲$ و $p=۱$ ، $q=-۲$.

$$kG(s) = k \frac{۳ps^r + (۳q-۷)s^r - ps - q - ۳}{۲s^r - ps^r + (۹-q)s^r + ۳ps + ۳q + ۳} \quad (۳۲)$$

به ازای تمامی $p, q \in \mathbb{R}$ (با فرض آن که صورت و مخرج این تابع تبدیل ریشه مشترکی نداشته باشد)، در $\omega = ۱$ نقطه عطف دارد (یا به ازای $k > ۰$ یا به ازای $k < ۰$). به عنوان نمونه، دیاگرام Bode تابع تبدیل (۳۲) که به ازای $k=۲$ و $p=۱$ ، $q=-۲$ در شکل ۶ رسم شده است این موضوع را تأیید می‌کند. در این حالت، $\Omega = \{۱\}$ بوده که با توجه به (۳) نتیجه می‌دهد $i_1 = ۰$. در نتیجه استفاده از (۴) تساوی $N=۰$ را به دست می‌دهد که نتیجه صحیحی نیست. اما با توجه به (۱۴)، در حالت مذکور داریم $i_1 = ۱$ که طبق (۴) نتیجه صحیح $N=-۲$ را به دست می‌دهد (برای تأیید این موضوع، دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل (۳۲) به ازای $k=۲$ و $p=۱$ ، $q=-۲$ در شکل ۷ آمده است).

محمد صالح توافعی مدرک کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشته مهندسی برق (گرایش کنترل) از دانشگاه صنعتی شریف به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۲، ۱۳۸۴ و ۱۳۸۷ اخذ نموده است. وی از بهمن ماه سال ۱۳۸۷ به عنوان عضو هیأت علمی دانشکده مهندسی برق در دانشگاه صنعتی شریف مشغول به فعالیت می‌باشد. از جمله افتخارات کسب شده توسط ایشان می‌توان به کسب عناوین پژوهشگر برتر جوان از سوی بخش ایران IEEE (سال ۱۳۹۱)، پژوهشگر جوان برجسته مهندسی برق و کامپیوتر از سوی فرهنگستان علوم (سال ۱۳۹۶)، مؤلف کتاب شایسته تقدیر در سی و چهارمین دوره جایزه کتاب سال جمهوری اسلامی ایران (کتاب سیستم‌ها و کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری) و همچنین فرارگیری در لیست یک درصد برتر پراستنادترین محققین جهان بر اساس داده‌های پایگاه استنادی ISI اشاره نمود. زمینه تحقیقاتی ایشان در سال‌های اخیر حسابان مرتبه کسری و کاربردهای آن در سیستم‌های کنترلی بوده است.

- and application to a DC servomotor," *Automatica*, vol. 50, no. 8, pp. 2142-2149, Aug. 2014.
- [19] S. Khadraoui, H. N. Nounou, M. N. Nounou, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "A nonparametric approach to design robust controllers for uncertain systems: Application to an air flow heating system," *Journal of Process Control*, vol. 36, no. 1, pp. 1-10, Dec. 2015.

خشایار نشاط دانش‌آموخته سال ۱۳۹۷ مقطع کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق، گرایش کنترل از دانشگاه صنعتی شریف است. زمینه علمی تحقیقاتی مورد علاقه ایشان تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترلی در حوزه فرکانس می‌باشد.