بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی با استفاده از مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه مبتنی بر هندسه الگو

مریم اسلامی، مرتضی صاحب‌الزمانی، مهدی صدیقی و محبوبه هوشمند

چکیده: یک مدل محاسباتی کاملاً کوانتومی که بر مبنای دو مفهوم درهم‌تنیدگی کوانتومی و اندازه‌گیری کوانتومی ارائه شده است، مدل محاسباتی کوانتومی یک‌طرفه (1WQC) نام دارد. محاسبات در مدل 1WQC با الگوهای اندازه‌گیری نمایش داده می‌شوند. به منظور نمایش بهتر الگوهای مربوط از گراف درهم‌تنیدگی استفاده می‌شود که این گراف به همراه مجموعه کیوبیت‌های ورودی و خروجی آن، هندسه الگو نامیده می‌شود. تکنیک‌هایی به منظور بهینه‌سازی الگوهای حاصل از یک مدار کوانتومی در مدل 1WQC ارائه شده است. در کارهای پیشین از مدل 1WQC به منظور بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی استفاده شده است. یک مدار کوانتومی (اولیه) به الگوهای 1WQC تبدیل شده و بهینه‌سازی‌های ارائه‌شده در این مدل بر روی آن با استفاده از مجموعه قوانین بازنویسی به صورت ترتیبی بر روی گراف درهم‌تنیدگی حاصل از الگوی مربوط انجام شده و آن را ساده می‌کرد. سپس الگوی ساده‌شده مجدداً به مدار کوانتومی (ثانویه) تبدیل می‌گردید. در این مقاله روش‌های قبلی برای بهینه‌سازی مدارات کوانتومی با استفاده از مدل 1WQC بهبود داده می‌شود. در روش جدید به منظور بهینه‌سازی الگوی 1WQC حاصل از مدار کوانتومی، بر خلاف روش‌های گذشته از هیچ یک از قوانین بازنویسی به منظور ساده‌سازی الگو استفاده نشده و سعی شده است که تنها با بررسی هندسه الگو، تکنیک‌های بهینه‌سازی به صورت همزمان الگوی مربوط را ساده کنند. پس از اجرای عملیات بهینه‌سازی، الگوی مربوطه مجدداً به مدار کوانتومی تبدیل می‌شود و با کاهش کیوبیت‌های کمکی ساده‌تر می‌شود. نتایج نشان می‌دهد معیارهای هزینه مدار کوانتومی در روش جدید در مقایسه با روش‌های پیشین کاهش یافته است.

کلیدواژه: **محاسبات کوانتومی، مدل محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری، مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه، بهینه‌سازی، هندسه الگو.**

۱- مقدمه

ایده محاسبات بر مبنای مکانیک کوانتومی در زمانی شکل گرفت که دانشمندان با محدودیت‌های اساسی در محاسبات روبه‌رو شدند. فاینمن متوجه گردید که شبیه‌سازی رفتار کوانتومی ذرات بر روی کامپیوترهای کلاسیک به مقدار نمایی حافظه و زمان اجرا نیاز دارد. علاوه بر موارد گفته‌شده دانشمندان متوجه شدند اگر تکنولوژی مطابق با قانون مور جلو رود، اندازه عناصر مداری که بر روی تراشه‌های سیلیکونی قرار می‌گیرند بیشتر از چند اتم نخواهد بود. مشکلی که در زمینه بیان‌شده به وجود می‌آید این است که در مقیاس اتمی قوانین فیزیکی که خواص و رفتار مدارها را کنترل می‌کنند، بر اساس اصول مکانیک کوانتومی عمل می‌کنند و از قوانین دنیای کلاسیک تبعیت نمی‌کنند [۱] تا [۳].

در این حوزه از علم، الگوریتم‌هایی بیان شده‌اند که قادرند الگوریتم‌های سنگین محاسباتی را بسیار سریع‌تر از کامپیوترهای کلاسیک اجرا کنند. به عنوان نمونه در این زمینه می‌توان به الگوریتم تجزیه سریع اعداد بزرگ [۴] و الگوریتم جستجوی سریع در یک مجموعه تصادفی [۵] اشاره کرد. انتظار می‌رود که این عرصه از علم بتواند تحولات شگرفی را در زمینه‌های متفاوتی از جمله افزایش سرعت پردازش اطلاعات، رفع محدودیت‌های موجود در مجتمع‌سازی مدارها، انتقال امن داده‌ها و اطلاعات، کاهش مصرف انرژی و توان [۶] و [۲] ایجاد کند.

یکی از مدل‌های مشهور در محاسبات کوانتومی مدل محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری (MBQC)[1] [۷] و [۸] است. این مدل به دو دسته اصلی محاسبات کوانتومی مبتنی بر مخابره از راه دور (TQC)[2] [۹] و محاسبات کوانتومی خوشه‌ای (محاسبات کوانتومی یک‌طرفه (1WQC)[3]) تقسیم می‌شود [۷]، [۸]، [۱۰] و [۱۱].

مدل 1WQC برای نخستین بار به وسیله راسندورف[4] و بریگل[5] مطرح گردید [۱۰]. در مدل 1WQC کیوبیت‌ها در یک وضعیت اولیه و در خوشه دوبعدی با درهم‌تنیدگی[6] حداکثر قرار می‌گیرند و محاسبات کوانتومی با اندازه‌گیری‌های تک‌کیوبیتی روی آنها در پایه مشخص انجام می‌گیرد. از آنجایی که وضعیت اولیه سیستم در حین محاسبات از بین می‌رود این مدل به مدل محاسباتی یک‌طرفه شهرت دارد. وضعیت کیوبیت‌های موجود در مدار را که به صورت درهم‌تنیده قرار گرفته‌اند با گرافی با نام گراف وضعیت توصیف می‌کنند [۱۲]. در این گراف، برخی گره‌ها کیوبیت‌های ورودی، برخی کیوبیت‌های خروجی و برخی کیوبیت‌های اضافی (کمکی) را نمایش می‌دهند. از آنجایی که محاسبات کوانتومی یک‌طرفه غیر قطعی هستند به منظور دریافت نتایج قطعی، اصلاحاتی بر روی کیوبیت‌های غیر ورودی انجام می‌گیرد. این اصلاحات ممکن است وابسته به نتایج اندازه‌گیری‌های قبلی باشند که این خود حداقل عمق محاسبات را مشخص می‌کند [۱۳].

این مقاله در تاریخ ۲۵ دی ماه ۱۳۹۴ دریافت و در تاریخ ۱۸ خرداد ماه ۱۳۹۵ بازنگری شد.

مریم اسلامی، آزمایشگاه طراحی خودکار کوانتومی، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: maryameslamy@aut.ac.ir).

مرتضی صاحب‌الزمانی، آزمایشگاه طراحی خودکار کوانتومی، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: szamani@aut.ac.ir).

مهدی صدیقی، آزمایشگاه طراحی خودکار کوانتومی، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: msedighi@aut.ac.ir).

محبوبه هوشمند، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، (email: houshmand@mshdiau.ac.ir).

1. Measurement-Based Quantum Computing
2. Teleportation Quantum Computing
3. One-Way Quantum Computing
4. Raussendorf
5. Briegel
6. Entanglement

در سال ۲۰۰۹، روش جدیدی که از محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری بهره برده است به وسیله برودبنت[1] و کاشفی[2] معرفی گردید که در پی آن عمق مدارهای کوانتومی کاهش پیدا می‌کرد. در این مدل پس از تبدیل مدار کوانتومی به الگوی مورد نظر و انجام عملیات بهینه‌سازی (استانداردسازی، ساده‌سازی پائولی و انتقال سیگنال) و سپس تبدیل مجدد الگوی تغییریافته به مدار کوانتومی، امید می‌رود که عمق مدار کوانتومی مورد نظر کاهش یافته باشد [۱۴]. در ادامه کار [۱۴]، پایاس و همکاران در [۱۵] موفق به پیاده‌سازی این روش شدند و سعی کردند که این روش را بهبود دهند. همچنین از آنجایی که مدار حاصل از الگوی ۱WQC، تعداد زیادی کیوبیت کمکی تولید می‌کند در مقاله‌هایی همچون [۱۶] سعی در کاهش این هزینه از مدار شده است.

در مقاله حاضر الگوریتمی به منظور بهینه‌سازی الگوی حاصل از مدل ۱WQC و بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی مبتنی بر هندسه[3] الگو ارائه شده است. در این روش به منظور اجرای عملیات بهینه‌سازی از هیچ یک از قوانین ساده‌سازی به منظور بهینه‌سازی الگوی حاصل از هندسه الگوی ۱WQC استفاده نشده است و این عملیات تنها مبتنی بر کیوبیت‌های الگو و تعامل میان آنها انجام می‌گیرد. از این رو کتابخانه‌ای به منظور نگهداری این قوانین جهت بهینه‌سازی الگوی کوانتومی یک‌طرفه لازم نیست. در این روش الگوی حاصل از مدار کوانتومی پس از اجرای عملیات بهینه‌سازی (استانداردسازی، انتقال سیگنال و ساده‌سازی پائولی) به مدار کوانتومی برگردانده می‌شود. این راهکار سبب می‌شود که معیارهای هزینه مدارهای کوانتومی از جمله عمق، تعداد گیت و تعداد کیوبیت کمکی کاهش یابد.

ساختار این مقاله در ادامه آورده شده است. در بخش دوم مفاهیم بنیادی به منظور درک بهتر مطالب موجود در مکانیک کوانتومی آورده شده است. در بخش سوم به توضیح روش پیشنهادی در این مقاله خواهیم پرداخت. در بخش چهارم، به بیان نتایج حاصل از روش‌های پیشنهادی پرداخته شده و نهایتاً در بخش پنجم یک جمع‌بندی کلی از مقاله ارائه خواهد شد.

۲- مفاهیم ابتدایی

در این بخش نخست به تعریف مفاهیم پایه همچون بیت کوانتومی، گیت کوانتومی و مدل مداری کوانتومی خواهیم پرداخت. در ادامه به معرفی مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه، قوانین بهینه‌سازی الگوهای کوانتومی و مفاهیم جدیدی همچون جریان و جریان تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود و در انتها به بیان گیت‌های جامع، معیارهای ارزیابی مدارهای کوانتومی و همچنین مروری کلی و مختصر بر روی روش‌های مختلف پیشین به منظور بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی با استفاده از مدل ۱WQC که در ادامه این مقاله به کار می‌روند می‌پردازیم.

۲-۱ بیت کوانتومی، گیت کوانتومی و مدل مداری کوانتومی

کوچک‌ترین میزان اطلاعات قابل نمایش در سیستم محاسباتی کوانتومی، بیت کوانتومی یا کیوبیت نامیده می‌شود. این مفهوم معادل با مفهوم واحد ساختاری بیت در سیستم محاسباتی کلاسیک است. در محاسبات کلاسیک هر بیت می‌تواند در یکی از دو حالت صفر و یا یک باشد اما هر کیوبیت می‌تواند یکی از این دو مقدار صفر $|0\rangle$ (معادل صفر کلاسیک)، $|1\rangle$ (معادل یک کلاسیک) و یا هر ترکیب خطی از آنها همانند $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ را اختیار کند که α و β اعداد مختلطی هستند به‌گونه‌ای که $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. به این خاصیت کیوبیت‌ها در مکانیک کوانتومی، خاصیت برهم‌نهی[4] گفته می‌شود [۱۷] و [۲].

در محاسبات کلاسیک به منظور اجرای عملیات خاص بر روی بیت‌ها از واحدهایی موسوم به گیت‌های منطقی استفاده می‌شود که بر روی بیت‌های ورودی اعمال می‌شوند و بیت‌های خروجی مرتبط با گیت مربوطه را ایجاد می‌کنند. در مکانیک کوانتوم نیز مفهومی معادل با آنچه بیان شد وجود دارد که سبب تغییر در وضعیت کیوبیت‌ها می‌گردد. این مفهوم به گیت کوانتومی شهرت دارد [۱۷] و [۲].

گیت‌های کوانتومی می‌توانند یک یا چند کیوبیت به عنوان ورودی داشته باشند. بر این اساس می‌توان گیت‌های کوانتومی را به گیت‌های تک‌کیوبیتی و یا چندکیوبیتی تقسیم‌بندی کرد. در ادامه به معرفی برخی از انوع مهم‌ترین گیت‌ها در حوزه کوانتوم خواهیم پرداخت.

گیت $J(\theta)$ یک گیت تک‌کیوبیتی است که ماتریس معادل با آن برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & e^{i\theta}\\ 1 & -e^{i\theta}\end{bmatrix}$ است.

گیت‌های دوران با زاویه α حول محورهای مختصات x، y و z را می‌توان به صورت ماتریس‌های (۱) نمایش داد. این گیت‌ها از جمله گیت‌های پرکاربرد تک‌کیوبیتی به شمار می‌آیند

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2}\\ -i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{bmatrix}$$
$$R_y(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{bmatrix} \quad (1)$$
$$R_z(\alpha)=\begin{bmatrix}e^{\frac{-i\alpha}{2}} & 0\\ 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}}\end{bmatrix}$$

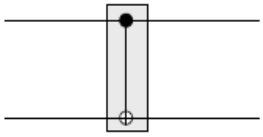
اگر U یک گیت تک‌کیوبیتی با نمایش ماتریسی زیر باشد

$$U=\begin{bmatrix}u_{00} & u_{01}\\ u_{10} & u_{11}\end{bmatrix} \quad (2)$$

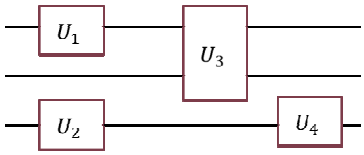
آن گاه گیت U کنترل‌شده، گیتی است که بر دو کیوبیت اثر می‌کند به طوری که کیوبیت اول، کیوبیت کنترل و کیوبیت دوم، کیوبیت هدف است. اگر کیوبیت کنترلی برابر $|1\rangle$ باشد گیت یکانی U بر روی کیوبیت هدف اعمال می‌شود و اگر کیوبیت کنترل، $|0\rangle$ باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر باقی می‌ماند

$$Controlled-U=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & u_{00} & u_{01}\\ 0 & 0 & u_{10} & u_{11}\end{bmatrix} \quad (3)$$

1. Broadbent
2. Kashefi
3. Geometry
4. Superposition



شکل ۱: نمایش شماتیک گیت CNOT.



شکل ۲: نمایش یک مدار کوانتومی نمونه.

یک گیت مشهور U کنترل‌شده، گیت معکوس‌کننده- کنترلی، CNOT است. کیوبیت اول در نقش کنترل و کیوبیت دوم در نقش هدف است. اگر کیوبیت کنترل $|۱\rangle$ باشد CNOT، کیوبیت هدف را معکوس می‌کند و اگر کیوبیت کنترل $|۰\rangle$ باشد کیوبیت هدف بدون تغییر خارج می‌شود. به عبارت دیگر، خروجی دوم، حاصل XOR کیوبیت کنترل و هدف است. شکل ۱ شماتیک این گیت را نمایش می‌دهد که کیوبیت اول از بالا، کیوبیت کنترلی و کیوبیت دوم کیوبیت هدف است.

گیت CZ (Z کنترل‌شده) یک گیت بنیادی در مدل محاسباتی ۱WQC است. ماتریس این گیت در زیر نمایش داده شده است

$$CZ=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix} \qquad (۴)$$

یکی از معروف‌ترین گیت‌های سه‌کیوبیتی، گیت C^{۲}NOT یا تافولی است. این گیت، یک گیت سه ورودی است به گونه‌ای که دو کیوبیت اول، کیوبیت کنترلی و کیوبیت سوم، کیوبیت هدف است. اگر هر دو کیوبیت کنترلی یک باشد کیوبیت هدف معکوس می‌شود و در غیر این صورت کیوبیت هدف بدون تغییر باقی می‌ماند.

به مجموعه گیت‌های X، Y، Z و I مجموعه گیت‌های پائولی گویند که با نماد π نمایش داده می‌شوند و گروه π^n به صورت ضرب تانسوری n عملگر پائولی به صورت (۵) تعریف می‌گردد

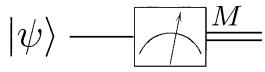
$$\pi^n=\left\{\begin{array}{l}e^{i\phi}A_۱\otimes\ldots\otimes A_n:\\ \forall j\in\{۱,\ldots,n\},A_j\in\pi,\phi\in\{۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲}\}\end{array}\right\} \qquad (۵)$$

مجموعه گیت‌های کلیفورد[1] n کیوبیتی به صورت (۶) تعریف می‌شوند

$$C_۲^n=\{U\in H^{۲^n}\,|\,\sigma\in\pi^n\Rightarrow U\sigma U^{\dagger}\in\pi^n\} \qquad (۶)$$

در واقع عملگر کلیفورد، عملگری است که عملگرهای پائولی را در اثر عمل ترکیب بسته نگه می‌دارد. به مجموعه گیت‌های CZ، CNOT، هادامارد و فاز گیت‌های کلیفورد گویند.

یک مدار کوانتومی از مجموعه‌ای از گیت‌های کوانتومی تشکیل شده است که بر روی کیوبیت‌های ورودی مدار عمل می‌کند [۱۷] و [۲]. در شکل ۲ یک نمونه از مدار کوانتومی و توالی گیت‌های اعمال‌شده بر روی کیوبیت‌ها نمایش داده شده است. در یک مدار کوانتومی، ارزیابی مدار از چپ به راست انجام می‌شود و هر خط نمایش‌دهنده یک کیوبیت و مسیر



شکل ۳: نماد اندازه‌گیری کوانتومی.

حرکت زمان است. ارزیابی مدارهای کوانتومی در این راستا به معنای حرکت رو به جلو در زمان است [۱۸].

پس از اعمال گیت‌های متوالی بر روی کیوبیت‌های مدار کوانتومی، هر کیوبیت در حالت مشخصی قرار می‌گیرد. به منظور استخراج اطلاعات هر کیوبیت، می‌بایستی آنها را اندازه‌گیری کرد. همان گونه که در حالت کلاسیک بیت‌ها یکی از دو مقدار صفر و یا یک را اختیار می‌کنند با اندازه‌گیری کیوبیت‌ها مشخص می‌شود که نتیجه نهایی صفر است یا یک.

در شکل ۳ نمایش عمل اندازه‌گیری بر روی یک کیوبیت نشان داده شده است. از آنجا که بعد از اندازه‌گیری، یکی از دو خروجی کلاسیک صفر و یا یک حاصل می‌شود، خروجی این سیستم اندازه‌گیری با دو خط نمایش داده می‌شود [۲].

۲-۲ مدل محاسباتی کوانتومی یک‌طرفه

در سال ۲۰۰۱ مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه [۸] و [۱۰] به وسیله راسندورف و بریگل معرفی شد. در مدل ۱WQC از دو مفهوم در هم تنیدگی و اندازه‌گیری که هیچ معادلی در محاسبات کلاسیک (دودویی) ندارند استفاده شده است. مدل ۱WQC در قیاس با مدل مداری از مزایایی برخوردار است. از جمله مزیت‌های مدل ۱WQC بر مدل مداری کوانتومی پیاده‌سازی آسان‌تر آن در تکنولوژی‌های فیزیکی مختلف است [۸] و [۱۲]. چالش‌هایی که برای ساخت یک کامپیوتر کوانتومی با معماری مبتنی بر حالت گرافی وجود دارد بسیار کمتر از مدل‌های دیگر است. از دیگر مزایای این مدل می‌توان به اجرای همزمان تمام اندازه‌گیری‌های موجود در مدارهای شامل گیت‌های کلیفورد اشاره کرد [۱۴].

در این مدل، هم‌بستگی کوانتومی به صورت گرافی و یا خوشه‌ای نمایش داده می‌شود و بنابراین به آن مدل گرافی یا خوشه‌ای نیز گفته می‌شود. در این مدل از آنجایی که اندازه‌گیری مخرب و غیر بازگشت‌پذیر است و وضعیت اولیه سیستم در طول اندازه‌گیری از بین می‌رود به آن مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه گویند. این مدل از چهار دستور آماده‌سازی، درهم‌تنیدگی، اندازه‌گیری و تصحیح تشکیل شده که در ادامه به توضیح هر یک خواهیم پرداخت.

۱) آماده‌سازی (N_i): عمل N_i کیوبیت iام را در حالت ابتدایی $|+\rangle$ قرار می‌دهد و بر روی تمام کیوبیت‌ها به غیر از کیوبیت‌های غیر ورودی اعمال می‌گردد. از آنجایی که این دستور بر روی تمام کیوبیت‌های غیر ورودی انجام می‌شود، این دستور از الگوی مربوطه حذف می‌شود. هنگامی که کیوبیت‌ها در حالت $|+\rangle$ قرار می‌گیرند، بدین معنی است که وضعیت ابتدایی آنها به صورت $(۱/\sqrt{۲})(|۰\rangle+|۱\rangle)$ خواهد بود.

۲) در هم تنیدگی (E_{ij}): اجرای این عمل با اعمال گیت CZ بر روی دو کیوبیت i و j سبب در هم تنیدگی این دو کیوبیت می‌شود.

۳) اندازه‌گیری (M_α^i): در این عمل، کیوبیت iام در پایه α اندازه‌گیری می‌شود. اگر دستور اندازه‌گیری به نتایج سیگنال‌های خروجی اندازه‌گیری قبلی وابسته باشد به صورت (۷) نمایش داده می‌شود

$$^{t}[M_i^{\alpha}]^{s}=M_i^{(-۱)^s\alpha+t\pi} \qquad (۷)$$

۴) تصحیح C_i: با اعمال گیت‌های X و Z بر روی کیوبیت iام با توجه به نتایج اندازه‌گیری قبلی می‌توان دستور تصحیح را انجام داد.

1. Clifford

یک الگوی محاسبات کوانتومی یک‌طرفه [۱۹] و [۲۰] به صورت مجموعه‌ای از کیوبیت‌ها (V)، مجموعه‌ای از کیوبیت‌های ورودی (I)، مجموعه‌ای از کیوبیت‌های خروجی (O) و مجموعه دستورهایی مثل A که بر روی کیوبیت‌های مجموعه V اعمال می‌شوند تعریف می‌گردد. این الگو به صورت $P=(V,I,O,A)$ بیان می‌گردد. مجموعه دستورهای A خود متشکل از دستوراتی همچون $A_1, A_2, \ldots, A_n$ است که هر یک از این دستورات ممکن است که به دستورات قبل از خود نیز وابسته باشد. لازم به ذکر است که این دستورات از راست به چپ اعمال می‌شوند.

برای نمایش الگوهای ۱WQC از ساختار گراف [۱۵] استفاده می‌شود. گراف استاندارد الگوی ۱WQC به صورت $G=(V,I,O,E,M,S,T)$ نمایش داده می‌شود که در ادامه به توضیح تک‌تک این مؤلفه‌ها خواهیم پرداخت [۱۵].

- V: به مجموعه گره‌های گراف G گفته می‌شود که هر گره از گراف بیان‌گر یک کیوبیت است.
- I: نمایان‌گر مجموعه گره‌های ورودی (مجموعه کیوبیت‌های ورودی) است.
- O: به مجموعه گره‌های خروجی (کیوبیت‌های خروجی) گفته می‌شود.
- E: نمایان‌گر یال‌های گراف G است که بیان‌گر درهم‌تنیدگی دو گره دو سر یال است.
- M: شامل مجموعه زوایای اندازه‌گیری هر گره در مجموعه V است.
- S: شامل مجموعه گره‌هایی از گراف است که اصلاح گیت X را روی هر گره از مجموعه V نمایش می‌دهد.
- T: متشکل از گره‌هایی است که وابستگی‌های اصلاح گیت Z را برای هر گره از مجموعه V نشان می‌دهد.

۲-۲-۱ بهینه‌سازی در الگوی محاسباتی یک‌طرفه

از دیگر عملیات در مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه، بهینه‌سازی است. در این مرحله از سه روش استانداردسازی، انتقال سیگنال و ساده‌سازی پائولی استفاده می‌گردد. این سه روش سبب تغییر در دستورات محاسبات کوانتومی یک‌طرفه شده و در بخش بعد قوانین بازنویسی‌شده[1] به اختصار نمایش داده می‌گردد. جزئیات حاصل از این امر به تفصیل در [۱۹] بیان شده است.

استانداردسازی

در این روش با اعمال دستوراتی، الگوها به شکل استاندارد بازنویسی می‌شوند. به الگویی استاندارد گفته می‌شود که در آن نخست دستورات درهم‌تنیدگی اجرا شود، سپس عملیات اندازه‌گیری اعمال شده و در نهایت با انجام دستورات تصحیح پایان یابد. یک الگوی استاندارد به صورت CME نمایش داده می‌شود. در این صورت نمایش E دستورات درهم‌تنیدگی، M دستورات اندازه‌گیری و C دستورات تصحیح (اعمال گیت‌های X و Z) را در بر می‌گیرد.

هنگامی که الگوهای مربوط به گیت‌های موجود در مدار ترکیب می‌شوند، هیچ کدام ساختار استاندارد معرفی‌شده را ندارند. این امر سبب می‌شود که برخی موازی‌سازی‌ها همانند اجرای دستورات درهم‌تنیدگی به صورت موازی حاصل نشود. با اعمال قوانین بازنویسی به منظور استانداردسازی الگوهای اولیه، می‌توان به موازی‌سازی الگوهای مورد نظر کمک کرد. این مجموعه قوانین از قرار زیر است:

به منظور انتقال دستور درهم‌تنیدگی (E) به ابتدای الگو از (۸) تا (۱۰) استفاده می‌شود

$$E_{ij}X_i^s \Rightarrow X_i^s Z_j^s E_{ij} \quad (۸)$$

$$E_{ij}Z_i^s \Rightarrow Z_j^s E_{ij} \quad (۹)$$

$$E_{ij}A_{k\rightarrow} \Rightarrow Z_j^s \rightarrow E_{ij} \quad (۱۰)$$

در قانون (۱۰)، A هر عملگری غیر از E است که بر روی مجموعه k کیوبیتی که کیوبیت‌های i و jرا در بر نمی‌گیرد اعمال می‌شود.

به منظور انتقال عملگرهای تصحیح در انتهای الگو از دستورات (۱۱) و (۱۲) استفاده می‌شود

$$A_{k\rightarrow}X_i^s \Rightarrow X_i^s A_{k\rightarrow} \quad (۱۱)$$

$$A_{k\rightarrow}Z_i^s \Rightarrow Z_i^s A_{k\rightarrow} \quad (۱۲)$$

در روابط بالا A عملگری دلخواه است که بر روی مجموعه k کیوبیتی که شامل کیوبیت i نیست اعمال می‌گردد.

ساده‌سازی پائولی

اگر زاویه اندازه‌گیری برابر صفر باشد به آن اندازه‌گیری پائولی X و اگر زاویه اندازه‌گیری برابر $\pi/2$ باشد به آن اندازه‌گیری پائولی Y گویند. اگر عمل اندازه‌گیری پائولی X بر روی یک کیوبیت انجام شود می‌توان عمل تصحیح X بر روی آن کیوبیت را حذف کرد. اگر بر روی کیوبیتی اندازه‌گیری پائولی Y انجام شود، عمل تصحیح X را می‌توان با عمل Z جایگزین کرد و سپس با استفاده از انتقال سیگنال که در بخش بعد توضیح داده می‌شود به انتهای الگو انتقال داد.

در ادامه قوانین موجود در ساده‌سازی پائولی بیان شده‌اند

$$M_i^{\cdot}X_i^s \Rightarrow M_i^{\cdot} \quad (۱۳)$$

$${}^t[M_i^{\cdot}]^s \Rightarrow {}^t[M_i^{\cdot}] \quad (۱۴)$$

$${}^t[M_i^{\frac{\pi}{2}}]^s \Rightarrow {}^{t+s}[M_i^{\frac{\pi}{2}}] \quad (۱۵)$$

$$X_i^s Z_i^t \Rightarrow Z_i^t X_i^s \quad (۱۶)$$

انتقال سیگنال

به منظور بهینه‌سازی الگوهای کوانتومی روش دیگری به نام انتقال سیگنال معرفی شده است. این روش این امکان را می‌دهد که بتوان تمام دستورات تصحیح Z بر روی کیوبیت‌های اندازه‌گیری شده را به انتهای الگو منتقل کرد. در ادامه قوانین مربوط به این بهینه‌سازی آمده است

$${}^t[M_i^{\cdot}] \Rightarrow \varsigma_i^r[M_i^{\cdot}] \quad (۱۷)$$

$${}^t[M_j^{\cdot}]\varsigma_i^r \Rightarrow \varsigma_i^{r\,t[\frac{r+s_i}{s_i}]}[M_j^{\alpha}]^{s[\frac{r+s_i}{s_i}]} \quad (۱۸)$$

$$X_j^s\varsigma_i^r \Rightarrow \varsigma_i^r X_j^{s[\frac{r+s_i}{s_i}]} \quad (۱۹)$$

$$Z_j^s\varsigma_i^r \Rightarrow \varsigma_i^r Z_j^{s[\frac{r+s_i}{s_i}]} \quad (۲۰)$$

در روابط بالا $s[(r+s_i)/s_i]$ نمایش‌دهنده جابه‌جایی سیگنال s_i با $r+s_i$ در سیگنال s است. عملگر انتقال سیگنال با ς_i^r نمایش داده شده که از آن برای انتقال سیگنال به سمت چپ الگوی محاسباتی یک‌طرفه استفاده می‌شود.

1. Rewrite Rule

۲-۳ هندسه الگو

اگر فرض شود که هندسه الگوی (G,I,O) وجود داشته باشد این مجموعه شامل گراف G است که از دو زیرمجموعه I (مجموعه گره‌های ورودی) و O (مجموعه گره‌های خروجی) تشکیل شده است. یال‌های گراف با مجموعه E_G نمایش داده می‌شود و در ادامه تعریف می‌گردد. در رابطه $E_G=\prod_{(i,j)\in G}E_{ij}$، عملگر E_{ij} بیان‌گر عمل درهم‌تنیدگی در گراف G است و به گراف حاصل گراف درهم‌تنیدگی[1] گویند [۱۲].

۲-٤ جریان و جریان تعمیم‌یافته

یک جریان[2] برای یک گراف (G,I,O) شامل یک نگاشت $f:O^c\to I^c$ و یک ترتیب جزیی $\prec$ بر روی مجموعه رئوس V به گونه‌ای تعریف می‌شود که برای هر $x\in O^c$ شرایط زیر برقرار باشد:

- $(x,f(x))\in G$
- $x\prec f(x)$
- برای همه yهایی که با $f(x)$ همسایه هستند شرط $x\prec y$ برقرار باشد.

یک جریان تعمیم‌یافته[3] [۲۱] برای یک گراف (G,I,O) شامل یک نگاشت $f:O^c\to P^{I^c}$ (از کیوبیت‌های غیر خروجی به زیرمجموعه‌ای از کیوبیت‌های غیر ورودی) و یک ترتیب جزیی $\prec$ بر روی مجموعه رئوس V به گونه‌ای تعریف می‌شود که برای هر $x\in O^c$ و $\lambda\in\{(X,Y),(X,Z),(Y,Z)\}$ شرایط زیر برقرار باشد:

- اگر $y\in g(x)$ و $x\neq y$ باشد در این صورت $x\prec y$ برقرار است.
- اگر $y\prec x$ و $x\neq y$ باشد در این صورت $y\notin Odd(g(x))$ برقرار است.
- اگر $\lambda(x)=(X,Y)$ باشد در این صورت $x\notin g(x)$ و $x\in Odd(g(x))$ برقرار است.
- اگر $\lambda(x)=(X,Z)$ باشد در این صورت $x\in g(x)$ و $x\in Odd(g(x))$ برقرار است.

اگر $\lambda(x)=(Y,Z)$ باشد در این صورت $x\in g(x)$ و $x\notin Odd(g(x))$ برقرار است.

۲-۵ گیت‌های جامع

به منظور انجام محاسبات کوانتومی به صورت جامع و کلی به معرفی گیت‌های جامعی پرداخته می‌شود که می‌توان هر مدار کوانتومی را بر اساس آنها پیاده‌سازی کرد. هر گیت یکانی تک‌کیوبیتی را می‌توان بر اساس گیت $J(\theta)$ بیان کرد [۳]. این رابطه در (۲۱) نمایش داده شده است

$$U=e^{i\alpha}J(0)J(\beta)J(\gamma)J(\delta) \qquad (۲۱)$$

گیت دو کیوبیتی $Controlled-U$ را نیز می‌توان طبق (۲۲) بر اساس دوگیت $J(\theta)$ و CZ نوشت

$$\begin{aligned}CU_{1,2}=&J_1(0)J_1(\alpha+\frac{\beta+\gamma+\delta}{2})J_2(0)J_2(\beta+\pi)\\&J_2(\frac{-\gamma}{2})J_2(\frac{-\pi}{2})J_2(0)CZ_{1,2}J_2(\frac{\pi}{2})J_2(\frac{\gamma}{2})\\&J_2(\frac{-\beta-\pi-\delta}{2})J_2(0)CZ_{1,2}J_2(\frac{-\beta-\pi+\delta}{2})\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

از آنجایی که گیت‌های CU[4] و گیت‌های تک‌کیوبیتی یک مجموعه گیت جامع هستند و هر دوی اینها با استفاده از گیت‌های CZ و $J(\theta)$ قابل پیاده‌سازی می‌باشند پس می‌توان دو گیت CZ و $J(\theta)$ را نیز به عنوان یک مجموعه دوکیوبیتی جامع تعریف کرد و همه گیت‌های کوانتومی را بر اساس آنها نوشت. با توجه به این مسئله به منظور نشان‌دادن جامع‌بودن الگوهای ۱WQC می‌توان پیاده‌سازی این دو گیت جامع را با استفاده از این الگو نشان داد [۲۲].

۲-٦ ارزیابی هزینه در مدارهای کوانتومی

برای ارزیابی هزینه در مدارهای کوانتومی از پارامترهای مختلفی استفاده می‌شود که عبارتند از تعداد گیت‌های CNOT و گیت‌های دوران[5] تک‌کیوبیتی، عمق مدار و تعداد کیوبیت‌های کمکی. در ادامه هر یک از موارد فوق توضیح داده خواهد شد.

- تعداد گیت‌های CNOT و گیت‌های دوران تک‌کیوبیتی (R_x، R_y و R_z)

به گیت‌های CNOT و دوران تک‌کیوبیتی، کتابخانه ابتدایی گفته می‌شود. تعداد گیت‌های CNOT و دوران تک‌کیوبیتی و مجموع کلی گیت‌ها از دیگر معیارهای ارزیابی مدارهای کوانتومی است [۲۳] و [۲۴].

- عمق مدار کوانتومی

یکی دیگر از پارامترهای متداول در بررسی هزینه در مدارهای کوانتومی عمق آنهاست. به حداکثر تعداد گیت در هر مسیر از ورودی به خروجی عمق مدار گفته می‌شود.

- تعداد کیوبیت‌های کمکی

تعداد کیوبیت‌های مصرفی یک مدار نیز از جمله معیارهای متداولی است که به منظور ارزیابی یک مدار کوانتومی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این متغیر تعداد کیوبیت‌هایی است که مدار کوانتومی بر روی آنها اعمال می‌شود.

۳- مروری بر روش‌های پیشین

پس از آن که مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه نخستین بار به وسیله راسندورف و بریگل معرفی شد [۱۰]، در [۱۴] این مدل به منظور کاهش عمق مدارهای کوانتومی استفاده شد. آنها در روش خود نخست مدار کوانتومی را به الگوی ۱WQC تبدیل کرده و پس از اعمال بهینه‌سازی‌های گفته‌شده در بخش قبل، الگوی مورد نظر را مجدداً به مدار کوانتومی تبدیل کردند. در ادامه کار آنها در [۱۵] این روش به صورت خودکار پیاده‌سازی گردید و سعی شد که این روش بهبود داده شود. از آنجایی که تعداد کیوبیت‌های کمکی در مدار کوانتومی ثانویه نسبت به مدار کوانتومی اولیه افزایش می‌یافت در سال ۲۰۱۳ در [۱۶] راهکاری به منظور کاهش تعداد کیوبیت کمکی در مدار ثانویه (مداری که مجدداً از الگوی محاسبات کوانتومی یک‌طرفه به دست می‌آید) پیشنهاد

1. Entanglement Graph
2. Flow
3. Generalized Flow
4. Controlled-U
5. Rotation Gate

گردید. در این روش به منظور کاهش تعداد کیوبیت‌های کمکی، قوانین بازنویسی‌ای مطرح گردید که با اعمال آنها کیوبیت‌های اضافی مدار کاهش پیدا می‌کرد.

در [۲۵] به مفهوم جریان اشاره شده است و جریان شرط کافی به منظور قطعی‌بودن محاسبات کوانتومی یک‌طرفه است [۲۶]. در [۱۳] و [۲۵] به بیان الگوریتمی به منظور یافتن ترتیب کیوبیت‌ها در جریان پرداخته شده است. جریان تعمیم‌یافته یک شرط لازم و کافی به منظور قطعی‌بودن الگوها در محاسبات کوانتومی یک‌طرفه را ایجاد می‌کند [۲۱]. در [۱۳] الگوریتمی به منظور یافتن ترتیب کیوبیت‌ها در جریان تعمیم‌یافته نشان داده شده است.

٤- روش پیشنهادی

در این بخش به معرفی راهکاری پرداخته می‌شود که نخست یک مدار کوانتومی به الگوی معادل با خود تبدیل می‌شود. پس از اجرای عملیات بهینه‌سازی به صورت موازی بر روی گراف، مجدداً به مدار کوانتومی بازگردانده می‌شود. سرانجام مدار جدید با اجرای قوانین بازنویسی به گونه‌ای ساده می‌گردد که موجب بهبود پارامترهای ارزیابی مدار کوانتومی همچون عمق، تعداد گیت و تعداد کیوبیت اضافی می‌شود. در این روش هندسه الگوی معادل با مدار کوانتومی به عنوان ورودی به الگوریتم مورد نظر داده می‌شود. الگوریتم مورد نظر الگوی ورودی را با استفاده از ترتیب کیوبیت‌ها در ترتیب جزیی جریان تعمیم‌یافته و استانداردسازی به صورت جزیی ساده می‌کند و همچنین سعی شده که شیوه‌ای مطرح گردد که بتوان پارامترهای ارزیابی مدار را بهبود داد. علاوه بر موارد گفته‌شده، در این روش هنگامی که الگوی ساده‌شده به مدار کوانتومی باز گردانده می‌شود به منظور بهینه‌سازی بیشتر مدار از قوانین بازنویسی استفاده می‌شود که سبب بهبود پارامترهای ارزیابی مدار کوانتومی می‌گردد.

در این روش در نحوه بهینه‌سازی الگوها به گونه‌ای رفتار می‌شود که الگوها به صورت کامل استاندارد نگردند. در واقع در این حالت آن دسته از دستورات در هم تنیدگی به ابتدای الگو برده می‌شوند که به آنها نیاز باشد. در این روش دستورات در هم تنیدگی بسته به نیاز به مکان مناسب خود به عقب رانده می‌شوند و در این حالت از انتقال تمام دستورات در هم تنیدگی جلوگیری می‌شود. در روش مربوطه با استفاده از خروجی الگوریتم جریان تعمیم‌یافته و ترتیب کیوبیت‌ها در این خروجی، دستورات در هم تنیدگی به مکان مناسب خود انتقال پیدا می‌کنند. در این انتقال‌ها دستورات در هم تنیدگی در قسمت ابتدایی الگو یا پس از دستورات تصحیح کیوبیت‌های میانی قرار می‌گیرند.

در الگوریتم مربوطه برای کیوبیت‌هایی که در سطح اول ترتیب جزیی جریان تعمیم‌یافته قرار می‌گیرند باید دستورات در هم تنیدگی مربوط به آنها به ابتدای الگو انتقال داده شوند. دستورات در هم تنیدگی مربوط به یک کیوبیت در مرحله iام به دستورات در هم تنیدگی‌ای گفته می‌شود که از میان دو کیوبیت دخیل در ارتباط، یکی از آنها در مرحله iام قرار داشته باشد. البته لازم به ذکر است که سطح کیوبیت منتخب باید در مقایسه با کیوبیت دیگر کمتر باشد چون در غیر این صورت این دستور قبلاً انتقال داده شده است.

در رابطه با کیوبیت‌هایی که در سطوحی غیر از سطح اول ترتیب جزیی جریان تعمیم‌یافته قرار گرفته‌اند، دستورات در هم تنیدگی مرتبط با آنها پس از دستورات تصحیح سطوح قبلی آنها قرار می‌گیرد. یعنی اگر کیوبیتی در سطح i قرار داشته باشد، دستورات در هم تنیدگی مرتبط با آن پس از دستورات موجود در سطح c_{i-1} قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که وابستگی‌های Z که در اثر انتقال دستورات در هم تنیدگی به وجود می‌آیند نیز به وسیله انتقال سیگنال از بین خواهند رفت.

در این بخش به توصیف الگوریتمی می‌پردازیم که قادر است بر خلاف روش‌های گذشته به بهینه‌سازی هندسه الگوی حاصل از مدار کوانتومی ورودی بپردازد به طوری که از هیچ یک از قوانین بهینه‌سازی‌های الگو (استانداردسازی، انتقال سیگنال و ساده‌سازی پائولی) استفاده نکند. در روش‌های گذشته به منظور بهینه‌سازی الگوها عملیات ساده‌سازی را با اعمال قوانین بهینه‌سازی انجام می‌دادند [۱۹]. لازم به ذکر است که این قوانین بهینه‌سازی در بخش دوم به تفصیل توضیح داده شده است.

در [۱۹] به منظور بهینه‌سازی الگوها باید این قوانین بهینه‌سازی به صورت ترتیبی بر روی الگوها اجرا گردند. یعنی نخست الگو را استاندارد کرده، سپس عملیات انتقال سیگنال بر روی آن انجام گیرد و در نهایت اگر در الگو، اندازه‌گیری با زاویه صفر و یا $\pi/2$ وجود داشته باشد، ساده‌سازی پائولی صورت گیرد.

از جمله مزایای الگوریتم پیشنهادی در این است که این عملیات می‌تواند بدون اجرای این قوانین بهینه‌سازی به صورت مجزا و ترتیبی صورت گیرد. در واقع عملیات بهینه‌سازی در این روش به صورت همزمان و تنها با بررسی همسایه‌های کیوبیت‌ها اعمال می‌شوند. در روش قبلی لازم بود که نخست بررسی گردد که با توجه به وجود شرایطی مخصوص، هر یک از تکینک‌های بهینه‌سازی اجرا گردند. این عملیات به صورت مجزا انجام می‌گرفت و الگو پس از عبور پیدا کردن از سه روش استانداردسازی، انتقال سیگنال و ساده‌سازی پائولی به الگوی ساده‌شده تبدیل شده و به عنوان خروجی کار تحویل داده می‌شد. البته پیش از آن نیز لازم بود که گراف معادل با این الگو ترسیم شود و الگوی مزبور بر اساس گراف مورد نظر به دست آید. اما در روش پیشنهادی می‌توان تنها با بررسی هندسه الگو و تعامل میان گره‌ها و همسایه‌های آنها به الگوی ساده‌شده دست یافت. لازم به ذکر است که در این روش نیازی به استخراج الگو و اجرای ترتیبی روش‌های بهینه‌سازی نیست. این روش قادر است بر روی الگوی حاصل از مدار کوانتومی ورودی اجرا گردد.

در پیاده‌سازی الگوریتم اصلی از چند الگوریتم فرعی[1] استفاده شده که در ادامه، نخست به توضیح هر یک از این زیرالگوریتم‌ها خواهیم پرداخت.

در ساختار هندسه الگوی حاصل از مدار کوانتومی، هر گره به منزله یک کیوبیت و هر یال ارتباط در هم تنیدگی میان این کیوبیت‌ها را نمایش می‌دهد. ویژگی‌های مربوط به کیوبیت‌ها در شبه‌کدها در جدول ۱ نمایش داده شده است. ایده اصلی از چهار زیربخش و یا به عبارتی چهار تابع تشکیل شده که در ادامه آمده‌اند.

٤-١ الگوریتم *FindNeighborZQubit* (*QList*)

وظیفه این تابع پیداکردن لیست وابستگی Z مجاورت[2] [۲۷] همه کیوبیت‌های یک هندسه الگو است. در این قسمت نخست به توصیف مجموعه لیست وابستگی Z مجاورت خواهیم پرداخت. این مجموعه به صورت (۲۳) تعریف می‌گردد

$$N_z(j)=\{k\in O^c \mid f(k)\in N(j)\setminus f(j)\} \qquad (۲۳)$$

این مجموعه شامل کیوبیت‌هایی است که کیوبیت j از آنها دستور تصحیح z را دریافت می‌کند. این مهم بدین معنی است که سیگنال‌های دستور z_j در این مجموعه قرار گرفته‌اند و به عبارت دیگر این تعریف را می‌توان

1. Sub Algorithm
2. Z-Dependency Neighborhood

جدول ۱: توصیف ویژگی‌های هر کیوبیت.

ویژگی‌های هر کیوبیت	توصیف هر یک از ویژگی‌ها
q.Zlist	این لیست شامل همه کیوبیت‌هایی است که به عنوان کنترل‌های دستور تصحیح Z یک کیوبیت خاص در نظر گرفته می‌شوند.
q.Xlist	این لیست شامل همه کیوبیت‌هایی است که به عنوان کنترل‌های دستور تصحیح X یک کیوبیت خاص در نظر گرفته می‌شوند.
q.Angle	این ویژگی شامل زاویه اندازه‌گیری هر کیوبیت می‌شود.
$f^{-1}(q)$	این پارامتر برای نگهداری معکوس جریان هر کیوبیت در هندسه الگو مورد استفاده قرار می‌گیرد و برای کیوبیت‌های ابتدایی خالی است. مثلاً اگر $f(v)=q \rightarrow f^{-1}(q)=v$. این پارامتر با تغییر الگوریتم معرفی‌شده در [۱۳] که جریان بهینه را برای یک هندسه الگو تعیین می‌کند به دست می‌آید.
q.Neighborlist	هر یک از گره‌های هندسه الگو دارای تعدادی کیوبیت همسایه هستند. این لیست به منظور نگهداری این کیوبیت‌های همسایه مورد استفاده قرار گرفته است.
q.NeighborZlist	این لیست شامل تمام کیوبیت‌هایی (گره‌هایی) است که به عنوان لیست همسایگی Z رأس‌های موجود در هندسه الگو در نظر گرفته می‌شوند. این مهم در ادامه به تفصیل توضیح داده می‌شود. این متغیر خروجی تابع *FindNeighborZQubit* است.
q.Odd	این متغیر نشان می‌دهد که تعداد سیگنال‌هایی (کیوبیت‌هایی) که در لیست وابستگی Z مجاورت یک کیوبیت خاص به صورت مستقیم یا غیر مستقیم قرار گرفته‌اند فرد است یا زوج.
Qlist	این پارامتر شامل لیست تمام کیوبیت‌هایی است که در هندسه الگو قرار گرفته‌اند. این لیست مطابق با ترتیب جزیی جریان در هندسه الگو پر خواهد شد.

این گونه توصیف کرد که برای تمام کیوبیت‌هایی همچون $k \rightarrow O^c$ و مطابق با تعریف جریان $f(k)$ می‌توان نتیجه (۲۴) را گرفت

$$f(k) \in N(j) \rightarrow j \in N(f(k)) \qquad (۲۴)$$

معادله بالا مبین این نکته است که دستور تصحیح $Z_j^{(s_k)}$ از کیوبیت k به کیوبیت j وجود دارد [۲۷].

جزئیات این الگوریتم در شکل ۴ نمایش داده شده است. وظیفه الگوریتم موجود در شکل، یافتن لیست وابستگی Z همسایگی کیوبیت‌های موجود در یک هندسه الگو مطابق با (۲۳) است. نحوه انتخاب کیوبیت‌ها مطابق با ترتیب جزیی جریان صورت می‌گیرد.

۴-۲ تابع *Find-Xlist* (q)

این تابع تمام کیوبیت‌هایی را که از آنها دستور تصحیح X بر روی کیوبیت q وجود دارد پیدا می‌کند. به عبارت دیگر ورودی این تابع کیوبیتی همچون q و خروجی آن سیگنال‌های کنترلی دستور X_q است. به منظور یافتن لیست وابستگی X هر کیوبیت، نخست باید ترتیب انتخاب کیوبیت‌ها را در نظر داشت. علت این امر در این است که محاسبه لیست وابستگی X یک کیوبیت ممکن است که به کیوبیت‌های دیگری وابسته باشد و از این رو نحوه انتخاب کیوبیت‌ها بر اساس ترتیب جزیی جریان صورت می‌گیرد. به منظور تعیین لیست وابستگی X یک کیوبیت، پس از انتخاب آن باید معکوس جریان کیوبیت مورد نظر را در نظر گرفت. مطابق با الگوی تعریف‌شده در مدل ۱WQC، وابستگی X یک کیوبیت مطابق با کیوبیت موجود در معکوس جریان آن تعیین خواهد شد. از این رو کیوبیت‌های موجود در معکوس جریان در لیست وابستگی X یک کیوبیت قرار می‌گیرند.

با توجه به بهینه‌سازی انتقال سیگنال، تمام وابستگی‌های Z کیوبیت‌های غیر ورودی باید حذف شوند. از این رو لازم است که وابستگی Z کیوبیت موجود در جریان نیز به لیست وابستگی X کیوبیت انتخاب‌شده اضافه گردد. علت این امر در (۱۷) نمایش داده شده است. مطابق با (۱۷) با اعمال قاعده انتقال سیگنال تمام لیست وابستگی Z کیوبیت‌ها باید حذف شوند. از این رو این وابستگی‌ها می‌توانند در لیست وابستگی X برخی از کیوبیت‌ها تأثیر داشته باشند. بدین منظور در این الگوریتم اضافه‌شدن لیست وابستگی Z معکوس جریان نیز لحاظ شده و این امر سبب می‌شود که قاعده انتقال سیگنال بر روی هندسه الگوی مورد نظر اعمال گردد. به منظور درک بیشتر از مطالب گفته‌شده شبه‌کد الگوریتم مورد نظر در شکل ۵ نشان داده شده که در این شبه‌کد توضیحات گفته‌شده به صورت دقیق‌تر آمده است.

۴-۳ تابع *Find-Zlist* (q)

این تابع تمام سیگنال‌های کنترلی را که کیوبیت q در دستور تصحیح Z خود به آنها احتیاج دارد پیدا خواهد کرد. به عبارت دیگر از کیوبیت‌های خروجی، یک دستور تصحیح Z بر روی کیوبیت q وجود خواهد داشت.

به منظور پیداکردن لیست وابستگی Z کیوبیت‌های یک هندسه الگو، نخست باید به زاویه اندازه‌گیری کیوبیت انتخاب‌شده توجه داشت. علت این امر در این است که به منظور اجرای ساده‌سازی پائولی، زاویه اندازه‌گیری کیوبیت‌ها مد نظر قرار می‌گیرد. البته لازم به ذکر است که در این تابع ترتیب انتخاب کیوبیت‌ها بر اساس ترتیب جریان تعیین می‌گردد.

علت تفکیک زاویه در این تابع مطابق با (۱۶) و (۱۹) است. مطابق با (۱۶) اگر زاویه اندازه‌گیری برابر صفر باشد، وابستگی X کیوبیت حذف خواهد شد و مطابق با (۱۹) اگر زاویه اندازه‌گیری برابر $\pi/2$ باشد، وابستگی X کیوبیت به وابستگی Z تبدیل خواهد شد یعنی کلیه کیوبیت‌های موجود در لیست وابستگی X به لیست وابستگی Z کیوبیت مورد نظر اضافه خواهد شد.

در حین نوشتن لیست وابستگی Z و بهینه‌سازی الگو از طریق پیمایش گراف و همسایه‌های کیوبیت‌ها باید به نکات زیر توجه داشت. کیوبیت‌های انتخابی در یکی از حالات زیر قرار دارند. برای اجرای الگوریتم مورد نظر اطلاعاتی همچون ترتیب جزیی کیوبیت‌ها در جریان و جریان تعمیم‌یافته لازم است.

۱) اگر کیوبیت مورد نظر q دارای زاویه صفر و یا $\pi/2$ باشد، در این صورت تمام کیوبیت‌هایی که می‌خواهند به لیست وابستگی Z آن اضافه شوند به صورتی که در ادامه می‌آید محاسبه می‌شوند. اگر زاویه اندازه‌گیری کیوبیت مورد نظر صفر باشد تمام کیوبیت‌های موجود در لیست وابستگی Z مجاورت به لیست وابستگی Z اضافه شده و به دلیل قاعده انتقال سیگنال کلیه کیوبیت‌های موجود در

```
Algorithm FindNeighborZQubit (QList)
Input: an open graph
Output: find Z dependency neighborhood
1: begin
2: for (each q ∈ QList) do
3:     for (each N in q.NeighborList such that N ≠ f(q)) do
4:         Add f^{-1}(N) to q.NeighborZList
5:     end for
6: end for
7: end
```

شکل ۴: الگوریتم یافتن وابستگی همسایگی Z یک کیوبیت.

لیست وابستگی Z هر یک از کیوبیت‌های موجود در لیست وابستگی Z کیوبیت مربوطه به این لیست اضافه خواهد شد. اگر زاویه اندازه‌گیری کیوبیت مورد نظر $\pi/2$ باشد علاوه بر وابستگی Z مجاورت، معکوس جریان به همراه لیست وابستگی Z آن نیز به لیست وابستگی Z کیوبیت مورد نظر اضافه می‌گردد.

۲) اگر کیوبیت q زاویه صفر و یا $\pi/2$ نداشته باشد در این حالت باید دید که وضعیت همسایه‌ها چگونه است. برای محاسبه وابستگی Z کیوبیت q دو حالت وجود دارد:

- الف) اگر همسایه‌های کیوبیت q زاویه صفر و یا $\pi/2$ داشته باشند، معکوس جریان همسایه‌های q به لیست وابستگی Z مربوط به کیوبیت q اضافه خواهند شد. علت امر در این است که چون همسایه q زاویه صفر و یا $\pi/2$ دارد، تمام دستورات در هم تنیدگی مربوط به این همسایه باید به ابتدای الگو انتقال داده شوند که این خود سبب می‌شود که وابستگی Z نسبت به کیوبیت q به وجود آید. البته لازم به ذکر است که پس از این که لیست وابستگی Z مربوط به کیوبیت q به دست آمد باید تمام کیوبیت‌های مربوط به لیست وابستگی Z کیوبیت‌های موجود به لیست وابستگی Z کیوبیت q نیز اضافه شوند.
- ب) اگر کیوبیت q زاویه غیر صفر و یا غیر $\pi/2$ و همسایه‌های q نیز زاویه غیر صفر و یا غیر $\pi/2$ داشته باشند، اگر ترتیب معکوس جریان همسایه‌های q در جریان تعمیم‌یافته مساوی و یا بزرگ‌تر از کیوبیت q باشد به ترتیب جزیی جریان نگاه می‌شود و اگر کوچک‌تر بود به لیست وابستگی Z مربوط به کیوبیت q اضافه می‌گردد و در انتها لیست وابستگی Z کیوبیت‌های اضافه‌شده نیز به دلیل انتقال سیگنال به مجموعه *Zdependencylist* اضافه می‌گردند. علت این که در این حالت کیوبیت‌هایی با ترتیب جزیی جریان تعمیم‌یافته کوچک‌تر در نظر گرفته نمی‌شوند در این است که این کیوبیت‌ها راه را برای انتقال دستورات در هم تنیده E مربوط به کیوبیت q به سطح قبل مسدود کرده‌اند و نیازی به انتقال این دستورات E نیست. این امر باعث می‌شود که دستور تصحیح Z تولید نشود و تغییری در سطح کیوبیت ایجاد نگردد.

همچنین لازم به ذکر است از آنجایی که کیوبیت‌های خروجی اندازه‌گیری نمی‌شوند، زاویه‌ای برای آنها در نظر گرفته نمی‌شود. در این صورت مستقل از زاویه برای محاسبه لیست وابستگی این کیوبیت‌ها باید به زاویه همسایه‌های آنها دقت شود. بنابراین شرایط ایجادشده برای این کیوبیت‌ها در دسته ۲ مورد بررسی قرار خواهد گرفت یعنی کیوبیت‌های مذکور در دسته ۲ قرار می‌گیرند.

به منظور درک بهتر الگوریتم مورد نظر برای محاسبه لیست وابستگی Z، شبه‌کد این الگوریتم در شکل ۶ نمایش داده شده است.

```
Algorithm Find-Xlist(q)
Input: qubit q
Output: q.Xlist
1: select the qubit in f^{-1}(q) ;
2: qubit.odd = !qubit.odd ;
3: add qubit to XDependencyList;
4: for (each squbit in qubit.ZList) do
5:     if (squbit is not added to XDependencyList before) then
6:         add squbit to XDependencyList;
7:     end if
8:     squbit.odd = !squbit.odd ;
9: end for
10: if (XDependencyList is empty) then
11:     set q.Xlist = {} ;
12: else
13:     for (each qubit in XDependencyList) do
14:         if (qubit.Odd == TRUE) then
15:             add qubit to q.Xlist;
16:             qubit.Odd = FALSE;
17:             remove the qubit from the XDependencyList;
18:         end if
19:     end for
20: end if
21: if (XDependencyList is not empty) then
22: clear it;
23: end if
```

شکل ۵: شبه‌کد الگوریتم *Find-Xlist*(q).

الگوریتم اصلی *Geometry-Based Pseudo Simplified Pattern* (*Qlist*)

این تابع تمام روش‌های بهینه‌سازی را بر روی الگو اجرا می‌کند. اگر زاویه اندازه‌گیری کیوبیت مربوطه صفر و یا $\pi/2$ باشد به دلیل قاعده ساده‌سازی پائولی تنها لیست وابستگی Z کیوبیت مربوطه محاسبه می‌شود. اگر زاویه اندازه‌گیری کیوبیت مربوطه غیر از مقادیر گفته‌شده باشد و یا کیوبیت مورد نظر خروجی باشد، محاسبه هر دو لیست وابستگی X و Z برای کیوبیت مربوطه ضروری است. ذکر این نکته ضروری است که محاسبه وابستگی Z می‌تواند برای دستیابی به لیست وابستگی X با استفاده از روش انتقال سیگنال و نوشتن الگوی نهایی ساده‌شده مفید واقع گردد. در این الگوریتم از توابع پیشین استفاده شده و شبه‌کد الگوریتم نهایی در شکل ۷ نمایش داده شده است.

همان گونه که قبلاً گفته شد ورودی الگوریتم، هندسه الگویی است که هیچ گونه عملیات بهینه‌سازی بر روی آن انجام نشده و خروجی آن الگویی است که کاملاً استاندارد نیست. از این رو به الگوی خروجی الگوی شبه‌ساده گفته می‌شود.

پس از اجرای الگوریتم موجود در شکل ۷، الگوی خروجی به مدار تبدیل می‌شود. به منظور بهینه‌سازی مدار به دست آمده از قوانین بازنویسی که در [۱۶] معرفی شده است استفاده می‌شود. این نوع بهینه‌سازی سبب می‌شود که نتایجی که پس از بهینه‌سازی با قوانین بازنویسی به دست می‌آید در مقایسه با نتایج موجود با روش‌های پیشین بهتر شود. این نتایج به تفصیل در بخش بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در ادامه به منظور درک بهتر الگوریتم مربوطه و اجرای قوانین بازنویسی مثالی آورده شده است.

مثال

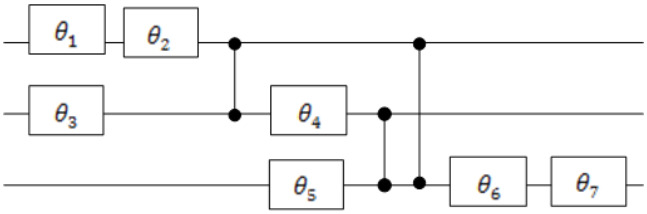
مداری که در شکل ۸ نمایش داده شده است، شامل گیت‌های CZ و $J(\theta)$ است. ابتدا مدار مربوطه به مداری با گیت‌های مربوط به کتابخانه ابتدایی تبدیل می‌شود. علت امر در این است که برای مقایسه مدار ابتدایی و انتهایی باید کتابخانه گیت‌ها یکسان باشد. بدین منظور مدار ابتدایی و

```
Algorithm Find-Zlist(q)
Input: qubit q
Output: q.Zlist
1:  begin
2:  if (q.angle is π/2 or 0) then
3:      if (q.angle is π/2 )
4:          for (cqubits including all the qubits in q.NeighborZList and
            all the qubits in f^-1(q)) do
5:              select a qubit from cqubits and squbit.odd =!squbit.odd
6:              add a qubit to Zdependencylist.
7:              for (all squbits in qubit.Zlist) do
8:                  if (squbit is not added to ZDependencyList
            beforehand) then
9:                      add squbits to Zdependencylist;
10:                 end if
11:             squbit.odd =!squbit.odd ;
12:         end for
13:     end for
14:   else
15:     for (cqubits including all the qubits in q.NeighborZList) do
16:         select a qubit from cqubits and
          squbit.odd =!squbit.odd
17:         add a qubit to Zdependencylist.
18:         for (all squbits in qubit.Zlist) do
19:             if (squbit is not added to ZDependencyList
            beforehand) then
20:                 add squbits to Zdependencylist;
21:             end if
22:             squbit.odd =!squbit.odd ;
23:         end for
24:     end for
25:   end if
26:   else
27:     for (all of the neighbors of q)
28:         if (the angle of the neighbor of q is 0 or π/2 ) do
29:             f^-1(N(q)).odd =! f^-1(N(q)).odd ;
30:             add f^-1(N(q)) to Zdependencylist.
31:             for (all squbits in f^-1(N(q)) .Zlist) do
32:                 if (squbit is not added to ZDependencyList
            before) then
33:                     add squbits to Zdependencylist;
34:                 end if
35:                 squbit.odd =!squbit.odd ;
36:             end for
37:         else if ((the angle of the neighbor of q is not 0 or
          π/2 )) do
38:             if (the level of q in gflow order ≤ the level of
          f^-1(N(q)) < the level of q in flow order) do
39:                 f^-1(N(q)).odd =! f^-1(N(q)).odd ;
40:                 add f^-1(N(q)) to Zdependencylist.
41:                 for (all squbits in f^-1(N(q)) .Zlist) do
42:                     if (squbit is not added to ZDependencyList
            beforehand) then
43:                         add squbits to Zdependencylist;
44:                     end if
45:                     squbit.odd =!squbit.odd ;
46:                 end for
47:             end if
48:         end if
49:     end for
50:     if (ZDependencyList is empty) then
51:         set q.Zlist = {} ;
52:     else
53:         for (each qubit in ZDependencyList) do
54:             if (qubit.Odd == TRUE) then
55:                 add qubit to q.Zlist;
56:                 qubit.Odd = FALSE;
57:                 remove the qubit from the ZDependencyList;
58:             end if
59:         end for
60:     end if
61:     if (ZDependencyList is not empty) then
62:         clear it;
63:     end
```

شکل ۶: شبه‌کد الگوریتم *Find-Zlist*(q).

```
Algorithm Geometry-Based Pseudo Simplified Pattern (Qlist)
Input: a geometry with flow
Output: a pseudo simplified pattern
1:  begin
2:  Print entanglement commands as outputs.
3:  for (each q ∈ QList) do
4:      if (q.angle is not π/2 or 0 or q is output) then
5:          Find-Xlist(q);
6:      end if
7:      Find-ZList(q);
8:      Print X_q^{q.Xlist} ;
9:      if (q is an output qubit) then
10:         Print Z_q^{q.Zlist} ;
11:     end if
12: end for
13: end
```

شکل ۷: شبه‌کد الگوریتم *Geometry-Based Pseudo Simplified*.



شکل ۸: مدار نمونه متشکل از گیت‌های CZ و $J(\theta)$.

انتهایی به یک مدار متشکل از گیت‌های کتابخانه ابتدایی تبدیل می‌شود. در [۲۸] نحوه تبدیل گیت $J(\theta)$ به گیت‌های دوران R_x، R_y و R_z نشان داده شده است. شکل ۸ پس از تبدیل به گیت‌های CNOT و دوران (R_z و R_y) در شکل ۹ نمایش داده شده است. عمق این مدار با در نظر گرفتن گیت‌های کتابخانه ابتدایی برابر ۱۲ است.

گراف حاصل از مدار شکل ۹ در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. ترتیب جزیی جریان برای کیوبیت‌های هندسه الگوی موجود در شکل ۱۰ از قرار زیر است

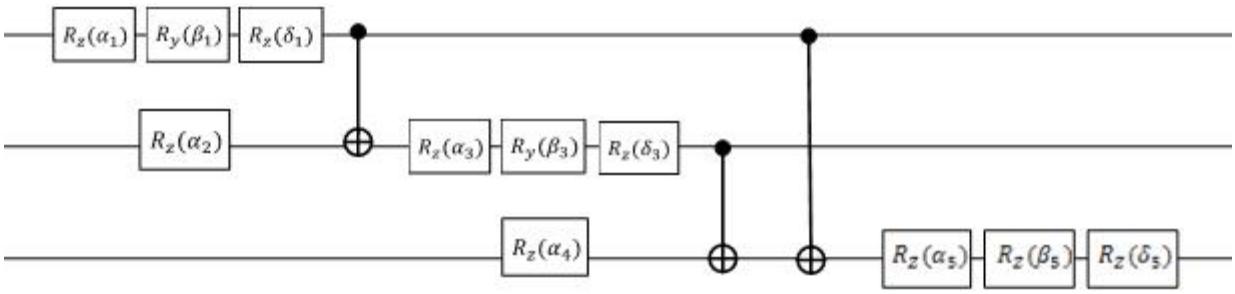
$$۱ \prec_f ۲,۴ \prec_f ۵,۷ \prec_f ۸ \prec_f ۹ \qquad (۲۵)$$

اجرای الگوریتم مربوطه در جدول ۲ نمایش داده شده است. خروجی این الگوریتم بدین صورت است که الگوی مورد نظر به صورت کامل استاندارد نشده است اما تمام CZهایی که به دلیل این استانداردسازی‌های جزیی به وجود آمده‌اند به دلیل انتقال سیگنال حذف شده‌اند. البته لازم به ذکر است که در صورت وجود زاویه اندازه‌گیری صفر و یا $\pi/۲$، عملیات ساده‌سازی پائولی نیز انجام می‌گیرد. الگوی شبه‌ساده حاصل از ایده پیشنهادی از قرار زیر است

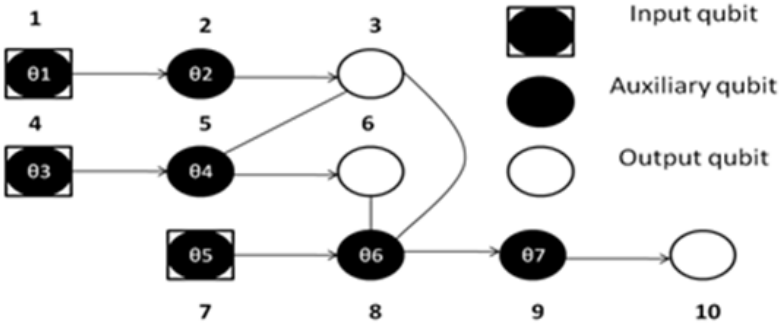
$$E_{۸۹}E_{۶۸}E_{۴۸}E_{۳۵}E_{۵۶}E_{۲۳}M_{۷}^{\theta_۵}M_{۴}^{\theta_۲}M_{۱}^{\theta_۱}E_{۷۸}E_{۴۵}E_{۱۲}$$
$$X_{۱۰}^{s_۸}X_{۶}^{s_۲+s_۵}X_{۳}^{s_۲}[M_{۹}^{\theta_۶}]^{s_۵+s_۸}E_{۹۱۰}[M_{۸}^{\theta_۶}]^{s_۷}[M_{۵}^{\theta_۲}]^{s_۴}[M_{۲}^{\theta_۲}]^{s_۱} \qquad (۲۶)$$

در شکل ۱۱ مدار حاصل از گراف شکل ۱۰ نمایش داده شده است. در ابتدا الگو به صورت کامل استاندارد شده و سپس عملیات بهینه‌سازی همچون انتقال سیگنال بر روی آن اجرا شده است. الگوی مورد نظر پس از بهینه‌سازی به مدار کوانتومی معادل با آن تبدیل شده و با اجرای قوانین بازنویسی مدار مربوطه به شکل ۱۱ تبدیل شده است.

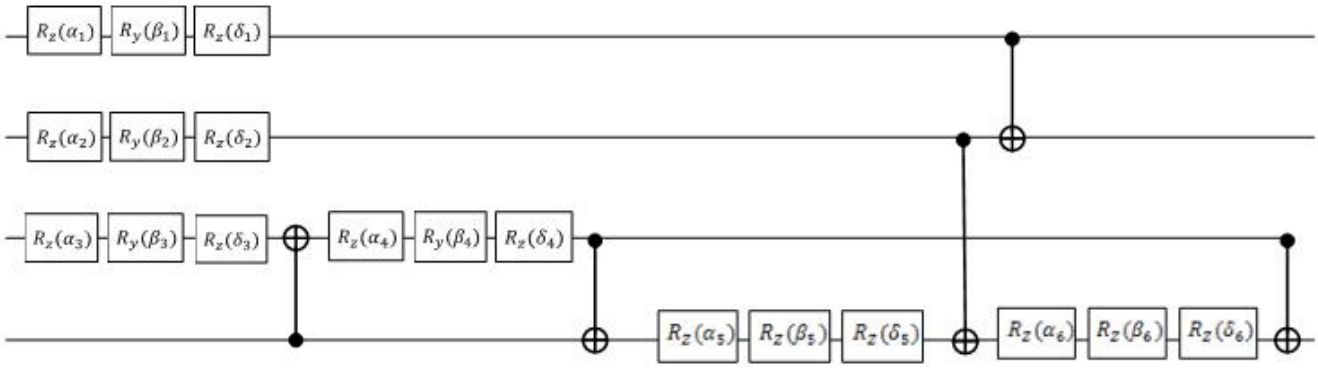
همان گونه که در شکل ۱۱ نمایش داده شده است عمق مدار مربوطه



شکل ۹: تبدیل مدار شکل ۸ به مداری متشکل از گیت‌های CNOT و دوران.



شکل ۱۰: گراف حاصل از مدار شکل ۸.



شکل ۱۱: مدار حاصل از الگوی کاملاً استاندارد پس از اجرای قوانین بازنویسی.

جدول ۲: بهینه‌سازی گراف شکل ۱۰ از طریق الگوریتم پیشنهادی.

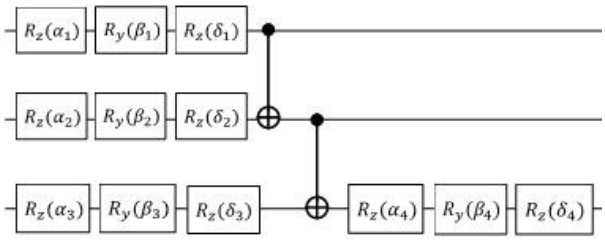
نام کیوبیت	نوع کیوبیت	معکوس جریان	زاویه	همسایگی Z هر کیوبیت	XList	ZList
۱	ورودی	تهی	θ_1	$N_z(1)=\{\}$	$X_1=\{\}$	$Z_1=\{\}$
۲	کمکی	۱	θ_2	$N_z(2)=\{\}$	$X_2=\{1\}$	$Z_2=\{\}$
۳	خروجی	۲	–	$N_z(3)=\{4,7,1\}$	$X_3=\{2\}$	$Z_3=\{\}$
۴	ورودی	تهی	θ_3	$N_z(4)=\{\}$	$X_4=\{\}$	$Z_4=\{\}$
۵	کمکی	۴	θ_4	$N_z(5)=\{2\}$	$X_5=\{4\}$	$Z_5=\{2\}$
۶	خروجی	۵	–	$N_z(6)=\{4,7\}$	$X_6=\{5,2\}$	$Z_6=\{\}$
۷	ورودی	تهی	θ_5	$N_z(7)=\{\}$	$X_7=\{\}$	$Z_7=\{\}$
۸	کمکی	۷	θ_6	$N_z(8)=\{5,2\}$	$X_8=\{7\}$	$Z_8=\{5,2,2=5\}$
۹	کمکی	۸	θ_7	$N_z(9)=\{7\}$	$X_9=\{8,5\}$	$Z_9=\{\}$
۱۰	خروجی	۹	–	$N_z(10)=\{8\}$	$X_{10}=\{9\}$	$Z_{10}=\{\}$

پس از بهینه‌سازی و با در نظر گرفتن کتابخانه گیت‌های CNOT و دوران برابر ۱۶ است. گیت‌های متشکل در این مدار هم همانند مدار ابتدایی برابر گیت‌های CNOT و دوران است.

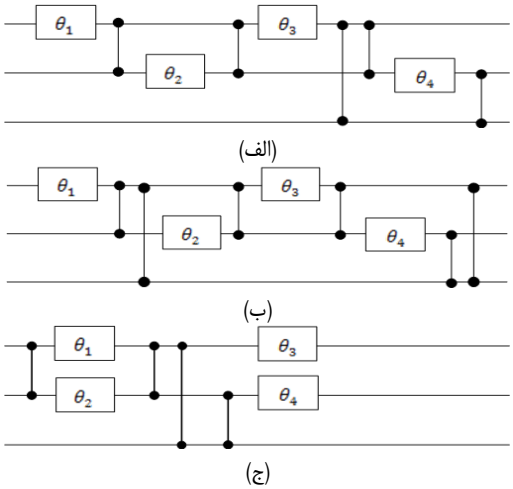
با اجرای الگوریتم پیشنهادی بر روی گراف شکل ۱۰ و اجرای قوانین بازنویسی بر روی آن، مدار نهایی از قرار شکل ۱۲ خواهد بود. عمق مدار شکل ۱۲ برابر ۸ است و مشاهده می‌شود که عمق مدار مورد نظر نسبت به مدار شکل ۱۱ و عمق مدار ابتدایی کاهش پیدا کرده است. شکل ۱۲ کارایی الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد. گیت‌های این مدار نیز متشکل از گیت‌های CNOT و دوران است.

۵- نتایج حاصل از روش پیشنهادی

در این بخش به توصیف نتایج حاصل از روش مربوطه خواهیم پرداخت



شکل ۱۲: مدار حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی و قوانین بازنویسی.



شکل ۱۳: مدارهای محک برای اجرای الگوریتم پیشنهادی، (الف) مدار ۱، (ب) مدار ۲ و (ج) مدار ۳.

که این نتایج در قالب نمودارهایی نشان داده شده‌اند. به منظور مقایسه پارامترهایی چون عمق، تعداد کیوبیت‌های اضافی و تعداد گیت در مدار انتهایی تمهیداتی در نظر گرفته شده است. از جمله این تمهیدات می‌توان به یکسان‌بودن کتابخانه گیت‌های مدار ابتدایی و مدار انتهایی اشاره کرد. در مدارهای انتهایی ساده‌شده با روش مربوطه و روش قبلی [۱۶] نیز از کتابخانه گیت‌های ابتدایی استفاده شده است. تمامی پارامترهای مربوطه بر روی مدارهایی با گیت‌های ابتدایی تست شده‌اند و نوع گیت‌ها در مدار اولیه و ثانویه کاملاً یکسان است. لازم به ذکر است که نتایج نمایش داده شده بر روی نمودارها بر حسب درصد است و پیاده‌سازی ایده مربوطه به زبان C++ بر روی یک کامپیوتر با پردازنده Intel Core i۵-۲۴۱۱۰M با فرکانس ۲/۳۰ گیگاهرتز و حافظه ۴ گیگابایت انجام گرفته است.

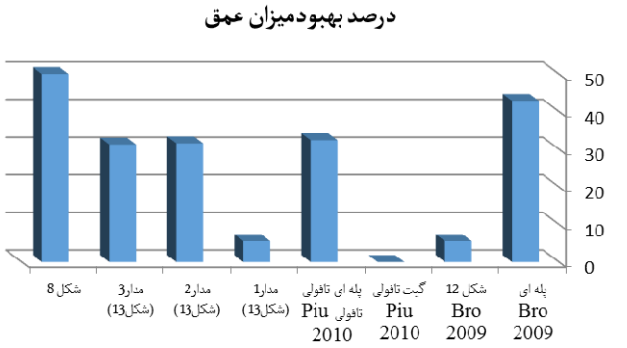
این مقایسه‌ها بر روی مدارات موجود در [۱۴] و [۱۵] و همچنین مدارهای نمایش داده شده در شکل ۱۳ مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در جدول ۳ به بررسی عمق حاصل از مدارات مورد نظر در حالت ابتدایی و پس از بهینه‌سازی با روش قبلی و روش پیشنهادی پرداخته شده است.

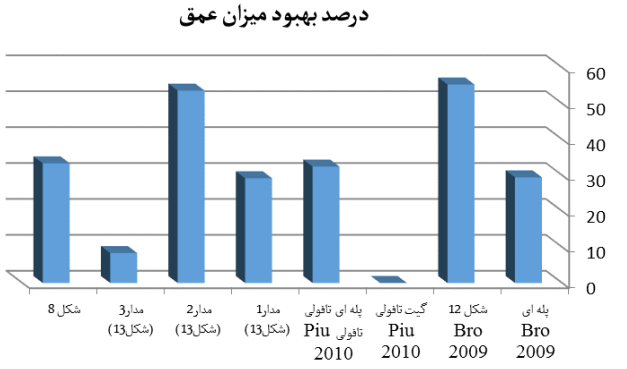
در شکل ۱۴ میزان کاهش عمق مدار انتهایی با روش پیشنهادی نسبت به عمق مدار ابتدایی در نظر گرفته شده است. همان گونه که در این نمودار مشاهده می‌شود در اکثر نمونه‌های آزمایشی روش پیشنهادی سبب کاهش عمق شده و این در حالی است که در رابطه با گیت تافولی تغییر عمقی صورت نگرفته است. میانگین بهبود هزینه مربوطه برابر ۲۴/۹ درصد است.

همان گونه که در شکل ۱۴ ملاحظه می‌شود روش 1WQC در اکثر مدارهای محک سبب بهبود عمق مدار نسبت به مدل مداری شده است که این مهم مزیت روش 1WQC را در بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی نشان می‌دهد.

در شکل ۱۵ میزان کاهش عمق مدار ثانویه با روش قبلی و روش



شکل۱۴: مقایسه درصد بهبود عمق مدار ابتدایی با عمق مدار انتهایی از طریق روش پیشنهادی.



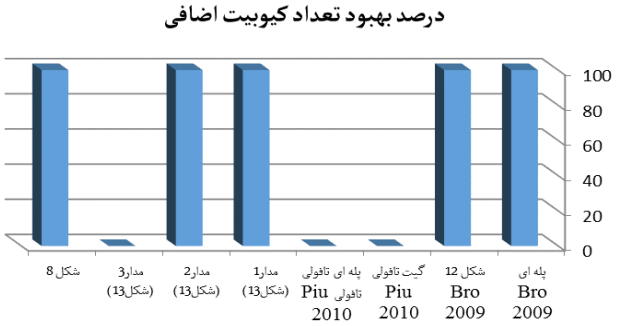
شکل ۱۵: مقایسه درصد بهبود عمق مدار انتهایی روش [۱۶] با روش پیشنهادی.

پیشنهادی دیده می‌شود. همان گونه که در نمودار شکل ۱۵ نمایش داده شده است در برخی نمونه‌ها کاهش عمق دیده شده ولی در نمونه‌هایی همچون تافولی تغییری دیده نشده است. میانگین بهبود هزینه کاهش عمق برابر ۲۵/۵۱ درصد است.

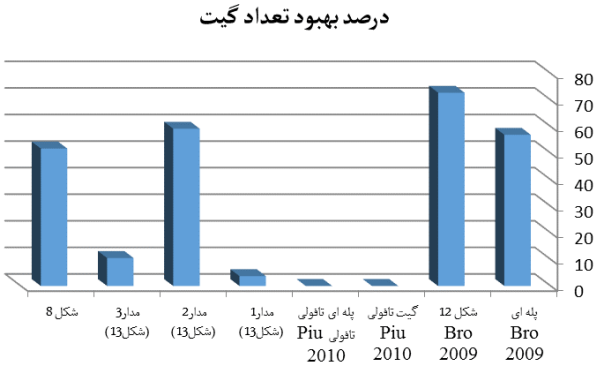
با استفاده از این روش چون الگوها به صورت کامل استاندارد نمی‌شوند از ایجاد دستورات تصحیح Z اضافی جلوگیری می‌شود. این امر سبب می‌شود که با اجرای انتقال سیگنال و کاهش دستور Z، تغییراتی در سیگنال‌های کنترلی دستورات تصحیح الگو به وجود آید و از این رو پس از تبدیل به مدار و اجرای قوانین بازنویسی، مدار انتهایی از عمق کمتری برخوردار باشد. همان گونه که در شکل مشاهده می‌شود برای برخی مدارها همچون تافولی از لحاظ بهبود عمق تغییری مشاهده نشده است. علت امر این است که در این مدارها زاویه اندازه‌گیری کیوبیت‌ها صفر و یا $\pi/2$ است و از این رو به منظور ساده‌سازی پائولی تمام دستورات در هم تنیدگی به ابتدای الگو انتقال پیدا می‌کنند. این امر سبب می‌شود که الگو به صورت کامل استاندارد شود و تغییری در نتیجه انتهایی مشاهده نشود.

در جدول ۴ به بررسی پارامتر کیوبیت‌های اضافی پرداخته شده است. در این جدول به مقایسه این پارامتر میان دو مدار انتهایی پس از بهینه‌سازی با روش قبلی و روش پیشنهادی پرداخته شده است. همان گونه که در جدول ۴ نشان داده شده روش پیشنهادی در برخی از نمودارها سبب کاهش تعداد کیوبیت‌های کمکی شده و حتی مصرف کیوبیت‌های کمکی را به صفر رسانده است. در برخی از مدارها تغییری در تعداد کیوبیت‌های کمکی دیده نمی‌شود.

همان گونه که قبلاً گفته شد یکی از معایب مدل 1WQC در این است که مدار انتهایی از کیوبیت کمکی زیادی برخوردار است و بنابراین در این مقاله سعی شده که تعداد کیوبیت‌های کمکی به نوعی کاهش داده شود. با توجه به الگوریتم پیشنهادی در بخش سوم و استفاده از قوانین



شکل ۱۶: مقایسه درصد بهبود تعداد کیوبیت اضافی مدار انتهایی روش [۱۶] با روش پیشنهادی.



شکل ۱۷: مقایسه درصد بهبود تعداد گیت در روش [۱۶] و روش پیشنهادی.

جدول ۳: مقایسه پارامتر عمق در مدارات پیشنهادی.

نام مدار	عمق ابتدایی	عمق نهایی در [۱۶]	عمق نهایی در روش پیشنهادی	بهبود روش پیشنهادی نسبت به عمق ابتدایی	بهبود روش پیشنهادی نسبت به [۱۶]
پله‌ای [۱۴]	۱۷	۲۱	۱۲	٪۴۲٫۸۵	٪۲۹٫۴۱
شکل ۱۲ [۱۴]	۱۸	۳۸	۱۷	٪۵٫۵۵	٪۵۵٫۲۸
گیت تافولی [۱۵]	۲۴	۲۴	۲۴	٪۰	٪۰
پله‌ای تافولی و تافولی [۱۵]	۳۷	۲۵	۲۵	٪۳۲٫۴۳	٪۳۲٫۴۳
مدار ۱ (شکل ۱۳)	۱۸	۲۴	۱۷	٪۵٫۵۵	٪۲۹٫۱۶
مدار ۲ (شکل ۱۳)	۱۹	۲۸	۱۳	٪۳۱٫۵۷	٪۵۳٫۵۷
مدار ۳ (شکل ۱۳)	۱۶	۱۲	۱۱	٪۳۱٫۲۵	٪۸٫۳۳
شکل ۸	۱۲	۱۶	۸	٪۳۳٫۳۳	٪۵۰
میانگین درصد بهبود				٪۲۴٫۹	٪۲۵٫۵۱

جدول ۴: مقایسه پارامتر تعداد کیوبیت اضافی در مدارات پیشنهادی.

نام مدار	[۱۶]	روش پیشنهادی	بهبود روش پیشنهادی نسبت به [۱۶]
پله‌ای [۱۴]	۴	۰	٪۱۰۰
شکل ۱۲ [۱۴]	۱۰	۰	٪۱۰۰
گیت تافولی [۱۵]	۷	۷	٪۰
پله‌ای تافولی و تافولی [۱۵]	۲۱	۲۱	٪۰
مدار ۱ (شکل ۱۳)	۳	۰	٪۱۰۰
مدار ۲ (شکل ۱۳)	۳	۰	٪۱۰۰
مدار ۳ (شکل ۱۳)	۰	۰	٪۰
شکل ۸	۱	۰	٪۱۰۰
میانگین درصد بهبود			٪۶۲٫۵

جدول ۵: مقایسه پارامتر تعداد گیت در مدارات پیشنهادی.

نام مدار	مدار ابتدایی	[۱۶]	روش پیشنهادی	بهبود روش پیشنهادی نسبت به [۱۶]
پله‌ای [۱۴]	۲۱	۵۸	۲۵	٪۵۶٫۸۹
شکل ۱۲ [۱۴]	۳۰	۱۱۰	۳۰	٪۷۲٫۷۲
گیت تافولی [۱۵]	۳۳	۹۲	۹۲	٪۰
پله‌ای تافولی و تافولی [۱۵]	۶۸	۱۶۸	۱۶۸	٪۰
مدار ۱ (شکل ۱۳)	۲۷	۴۴	۲۶	٪۳٫۷۰
مدار ۲ (شکل ۱۳)	۱۹	۴۹	۲۰	٪۵۹٫۱۸
مدار ۳ (شکل ۱۳)	۲۳	۱۹	۱۷	٪۱۰٫۵۲
شکل ۸	۱۴	۲۹	۱۴	٪۵۱٫۷۲
میانگین درصد بهبود				٪۳۱٫۸۴

بازنویسی [۱۶] سعی شده که تعداد کیوبیت‌های کمکی کاهش یابد. در برخی از مدارهای مزبور به دلیل چینش گیت‌هایی با زاویه صفر و یا $\pi/2$، دستورات در هم تنیدگی به گونه‌ای است که اجباراً باید به ابتدای الگو انتقال داده شوند و در این صورت بهینه‌سازی پیشنهادی با قبلی تفاوتی نخواهد داشت. مقایسه پارامتر تعداد کیوبیت اضافی در شکل ۱۶ نمایش داده شده و میانگین بهبود هزینه مورد نظر برابر ۶۲٫۵ درصد است. از دیگر پارامترهایی که در این بخش مورد بررسی قرار گرفته است، پارامتر تعداد گیت می‌باشد و نتایج حاصل از این بررسی در جدول ۵ نمایش داده شده است.

همان گونه که در شکل ۱۷ نشان داده شده است تعداد گیت‌های مدار ثانویه در روش پیشنهادی نسبت به روش قبلی کاهش یافته است. همچنین با روش پیشنهادی تعداد گیت‌ها در برخی نمودارها نسبت به مدار ابتدایی کاهش یافته است. اگرچه در برخی مدارها همچون پله‌ای تافولی و تافولی تعداد گیت‌ها به میزان زیادی افزایش یافته اما در این حالت میزان عمق نسبت به حالت ابتدایی به میزان زیادی کاهش یافته است. به صورت میانگین تعداد گیت‌ها به میزان ۳۱٫۸۴ درصد بهبود یافته است.

۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه از جمله مدل‌های محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری است که راه را برای ساخت کامپیوترهای کوانتومی هموار می‌سازد. این روش یکی از نویدبخش‌ترین مدل‌ها به منظور پیاده‌سازی فیزیکی و ساخت کامپیوترهای کوانتومی است.

در این مقاله به معرفی تکنیکی پرداخته شده که قادر است با استفاده از ترتیب کیوبیت‌ها در ترتیب جزیی جریان تعمیم‌یافته و استانداردسازی به صورت جزیی معیارهای ارزیابی مدارهای کوانتومی از جمله عمق مدار، تعداد کیوبیت کمکی و تعداد گیت‌های مدار را بهبود دهد.

با توجه به نتایج موجود در جداول و نمودارهای بخش ۴ می‌توان به تأثیر روش پیشنهادی در بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی پی برد. در تکنیک پیشنهادی الگوی خروجی یک الگوی شبه‌ساده است و به صورت کامل استاندارد نشده است. این استانداردسازی جزئی هوشمندانه سبب شده که دستورات CZ اضافی ایجاد نشده و از این رو عمل ساده‌سازی انتقال سیگنال نیز تحت‌الشعاع قرار گیرد. این امر سبب می‌شود که از ایجاد دستورات تصحیح اضافی و شکل‌گیری الگوهای جدید جلوگیری گردد. از این رو پارامترهایی همچون عمق، تعداد گیت و همچنین تعداد کیوبیت اضافی به منظور بهینه‌سازی مدار کوانتومی پس از الگو مصرف می‌گردد کاهش پیدا کند.

در این مقاله به بیان عمل اندازه‌گیری در ۱WQC تنها در صفحه (X,Y) از کره بلاخ پرداخته شد. از جمله کارهای پیشنهادی می‌توان به تعمیم این عمل در صفحات (X,Z) و یا (Y,Z) از کره بلاخ نیز اشاره کرد. بدین منظور می‌توان روابط مربوط به عملیات ساده‌سازی را به گونه‌ای تعمیم داد تا بتوان عملیات اندازه‌گیری الگوهای گیت‌ها را در صفحات (X,Z) و یا (Y,Z) نیز انجام داد.

از دیگر کارهای پیشنهادی می‌توان به تلفیق روش‌های سنتز مدارهای کوانتومی با روش ارائه‌شده در این مقاله به منظور ساده‌سازی آنها با استفاده از مدل ۱WQC اشاره کرد.

مراجع

[1] M. Nakahara and T. Ohmi, Quantum Computing: From Linear Algebra to Physical Realizations, Taylor & Francis, 2008.

[2] M. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2011.

[3] G. Benenti, G. Strini, and G. Casati, *Principles of Quantum Computation and Information*, World Scientific, 2004.

[4] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring," in *Proc. Foundations of Computer Science, Proc. of the 35th Annual Symp. on Foundations of Computer Science*, pp. 124-134, Nov. 1994.

[5] L. K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search," in *Proc. of ACM Symp. on Theory of Computing*, pp. 183-191, 22-24 May 1996.

[6] R. Landauer, "Irreversibility and heat generation in the computing process," *IBM J. of Research and Development*, vol. 5, no. 3, pp. 183-191, Jul. 1961.

[7] R. Jozsa, "An introduction to measurement based quantum computation," *NATO Science Series, III: Computer and Systems Sciences. Quantum Information Processing-from Theory to Experiment*, vol. 199, pp. 137-158, Nov. 2006.

[8] H. Briegel, *et al.*, "Measurement-based quantum computation," *Natur Physics*, vol. 5, no. 1, pp. 19-26, Jan. 2009.

[9] D. Gottesman and I. L. Chuang, "Quantum teleportation is a universal computational primitive," arXiv preprint quant-ph/9908010, 1999.

[10] R. Raussendorf and H. J. Briegel, "A one-way quantum computer," *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 22, p. 5188, May 2001.

[11] D. E. Browne and H. J. Briegel, *One-Way Quantum Computation - A Tutorial Introduction*, 2nd Ed., 2006.

[12] M. Hein, *et al.*, "Entanglement in graph states and its applications," arXiv preprint quant-ph/0602096, Feb. 2006.

[13] M. Mhalla and S. Perdrix, "Finding optimal flows efficiently," *Automata, Languages, and Programming, Springer*, vol. 5125, pp. 857-868, 2008.

[14] A. Broadbent and E. Kashefi, "Parallelizing quantum circuits," *Theoretical Computer Science*, vol. 410, no. 26, pp. 2489-2510, Jun. 2009.

[15] E. Pius, *Automatic Parallelisation of Quantum Circuits Using the Measurement Based Quantum Computing Model*, M.Sc. in High Performance Computing, University of Edinburgh, p. 65, 2010.

[16] R. D. Da Silva and E. F. Galvao, "Compact quantum circuits from one-way quantum computation," *Physical Review A*, vol. 88, no. 1, p. 012319, Jul. 2013.

[17] D. McMahon, *Quantum Computing Explained*, John Wiley & Sons, 2007.

[18] A. U. Khalid, Z. Zilic, and K. Radecka, "FPGA emulation of quantum circuits," in *Proc. IEEE Int. Conf. Computer Design: VLSI in Computers and Processors, ICCD'04,* pp. 310-315, Oct. 2004.

[19] V. Danos, E. Kashefi, and P. Panangaden, "The measurement calculus," *J. of the ACM*, vol. 54, no. 2, p. 8, Apr. 2007.

[20] V. Danos, E. Kashefi, P. Panangaden, and S. Perdrix, "Extended measurement calculus," in S. J. Gay and I. Mackie, eds., *Semantic Techniques in Quantum Computation*, Ch. 7, pp. 235-310, Cambridge University Press, 2009.

[21] D. E. Browne, E. Kashefi, M. Mhalla, and S. Perdrix, "Generalized flow and determinism in measurement-based quantum computation," *New J. of Physics*, vol. 9, no. 8, 16 pp., Aug. 2007.

[22] V. Danos, E. Kashefi, and P. Panangaden, "Parsimonious and robust realizations of unitary maps in the one-way model," *Physical Review A*, vol. 72, no. 6, p. 064301, Dec. 2005.

[23] S. S. Bullock and I. L. Markov, "Arbitrary two-qubit computation in 23 elementary gates," *Physical Review A*, vol. 68, no. 1, pp. 324-329, Jul. 2003.

[24] S. S. Bullock and I. L. Markov, "Smaller circuits for arbitrary n-qubit diagonal computations," arXiv preprint quant-ph/0303039, 2003.

[25] N. D. Beaudrap, "Finding flows in the one-way measurement model," *Physical Review A*, vol. 77, no. 2, 8 pp., Feb. 2008.

[26] V. Danos and E. Kashefi, "Determinism in the one-way model," *Physical Review A*, vol. 74, no. 5, p. 052310, Nov. 2006.

[27] R. D. da Silva, E. Pius, and E. Kashefi, "Global quantum circuit optimization," arXiv Preprint arXiv: 1301.0351, 2013.

[28] M. Houshmand, M. Saheb Zamani, M. Sedighi, and M. H.n Samavatian, "Automatic translation of quantum circuits to optimized one-way quantum computation patterns," *Quantum Information Processing*, vol. 13, no. 11, pp. 24632482, Nov. 2014.

مریم اسلامی در سال ۱۳۹۱مدرک‌کارشناسی‌مهندسی‌فناوری اطلاعات‌خود را از دانشگاه صنعتی اصفهان و در سال۱۳۹۳ مدرک‌کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر خود را از دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران دریافت نمود. نام‌برده اکنون به عنوان مهندس نرم‌افزار در پارک علم و فناوری به‌کارمشغول می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: ساده‌سازی مدارهای کوانتومی یکطرفه، محاسبات کوانتومی، طراحی مدارهای دیجیتال و مطالعه شبکه‌های اجتماعی.

مرتضی صاحب‌الزمانی در سال ۱۳۶۷ مدرک کارشناسی خود را از دانشگاه صنعتی اصفهان دریافت نمود و تحصیلات خود را به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۰ و ۱۳۷۵ در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی و علوم کامپیوتر در دانشگاه نیوساوت ولز در استرالیا به پایان رسانید. دکتر صاحب‌الزمانی از سال ۱۳۷۶ در دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات دانشگاه صنعتی امیرکبیر در تهران مشغول به فعالیت گردید و اکنون نیز عضو هیأت علمی این دانشکده می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه نام‌برده عبارتند از: محاسبات کوانتومی، امینت سیستم‌های سخت افزاری دیجیتال، طراحی خودکار سیستم‌های زیستی و سیستم‌های قابل بازپیکربندی.

مهدی صدیقی در سال ۱۳۶۹ مدرک کارشناسی مهندسی برق گرایش سخت‌افزار کامپیوتر خود را از دانشگاه صنعتی شریف، و در سال‌های ۱۳۷۳ و ۱۳۷۷ مدارک کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشته مهندسی برق و کامپیوتر از دانشگاه کلرادو در بولدر امریکا دریافت نمود. در فاصله سال‌های ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۰ ایشان به عنوان طراح ارشد سیستم‌های دیجیتال در شرکت‌های مختلفی در دره سیلیکن به کار مشغول بود. از سال ۱۳۸۰ تاکنون دکتر صدیقی عضو هیأت علمی دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات دانشگاه صنعتی امیرکبیر می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه ایشان شامل حاسبات کوانتومی، سنتز سیستم‌های حسابی و سیستم‌های نهفته می‌باشد.

محبوبه هوشمند تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته مهندسی کامپیوتر به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۸۶ و ۱۳۸۹ در دانشگاه فردوسی مشهد به پایان رسانده است. نام‌برده در سال ۱۳۹۳ مدرک دکترای مهندسی کامپیوتر خود را از دانشگاه صنعتی امیرکبیر دریافت کرده است. دکتر هوشمند هم‌اکنون استادیار گروه کامپیوتر در دانشکده مهندسی دانشگاه آزاد مشهد می‌باشد. از تابستان سال ۱۳۹۵، نام‌برده به عنوان محقق پسا دکترا در گروه پژوهشی نظریه اطلاعات کوانتومی در دانشگاه تکنولوژی و طراحی سنگاپور در کشور سنگاپور، به پژوهش مشغول است. زمینه‌های علمی وی شامل مباحث مختلف نظری در حوزه نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی است.