بهینه سازی در مسائل طراحی چیدمان با طراحی مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط

ایمان عباسی
دانشجوی دکتری دانشگاه تهران
i.abbasi@iauahvaz.ac.ir
دکتر محمد رضا مهرگان (نویسنده مسئول)
استاد تمام، دانشگاه تهران
mehregan@ut.ac.ir
دکتر احمد جعفر نژاد چقوشی
استاد تمام، دانشگاه تهران
jafarnjd@ut.ac.ir

تاریخ ارسال:
تاریخ پذیرش:

چکیده

هدف از مسایل طراحی چیدمان، یافتن کارآترین ترتیب قرارگیری تجهیزات، نیروی انسانی در دپارتمان‌ها و یا واحدها به‌نحوی است که حداکثر بهره‌وری در تولید محصول بدست آید. مدل‌های ابتکاری موجود، ضرورت جانمایی واحدها در درون دپارتمان‌های معین را لحاظ نمی‌کنند ولی در عمل بسیاری از سازمان‌ها نیاز به طراحی چیدمانی دارند که محدودیت جانمایی واحدها در دپارتمان‌های مربوط در آنها لحاظ گردد. بخصوص برای سازمان‌هایی که دارای ساختار سازمانی اجرایی می‌باشند و غالباً هرکدام از واحدهای هر دپارتمان اجرایی، می‌بایست در اداره مربوط به خود جانمایی گردند. در حال حاضر بسیاری از مسائل طراحی چیدمان با روش‌های ابتکاری و ریاضی برای حل مشکلات چیدمان مناسب نیستند زیرا برخی از تسهیلات لازم است با هم و در کنار هم قرار گیرند. هدف این مقاله آن است که در سازمانی که از چند دپارتمان اصلی تشکیل شده است و هر دپارتمان شامل چندین واحد می‌باشد، جانمایی بهینه به نحوی صورت پذیرد که محدودیت انجام جانمایی واحدها در داخل دپارتمان‌هایی که دارای مشابهت فرایند کاری می‌باشند برآورده گردد. از این رو محدودیت‌هایی به منظور طراحی چیدمان تسهیلات در دپارتمان‌های مشخص اضافه می‌شوند و مدل ریاضی برای بهینه‌سازی پیشنهاد می‌گردد. مزایای معرفی محدودیت‌های دپارتمانی عبارتند از: در مقایسه با مدل‌های موجود منطق عملگرایانه‌تری را برای طراحی چیدمان و تسهیلات ارائه می‌نماید و همچنین با کاهش محدودیت‌های همپوشانی در میان تسهیلات، می‌توان به بهبود کارایی محاسباتی کمک کرد.

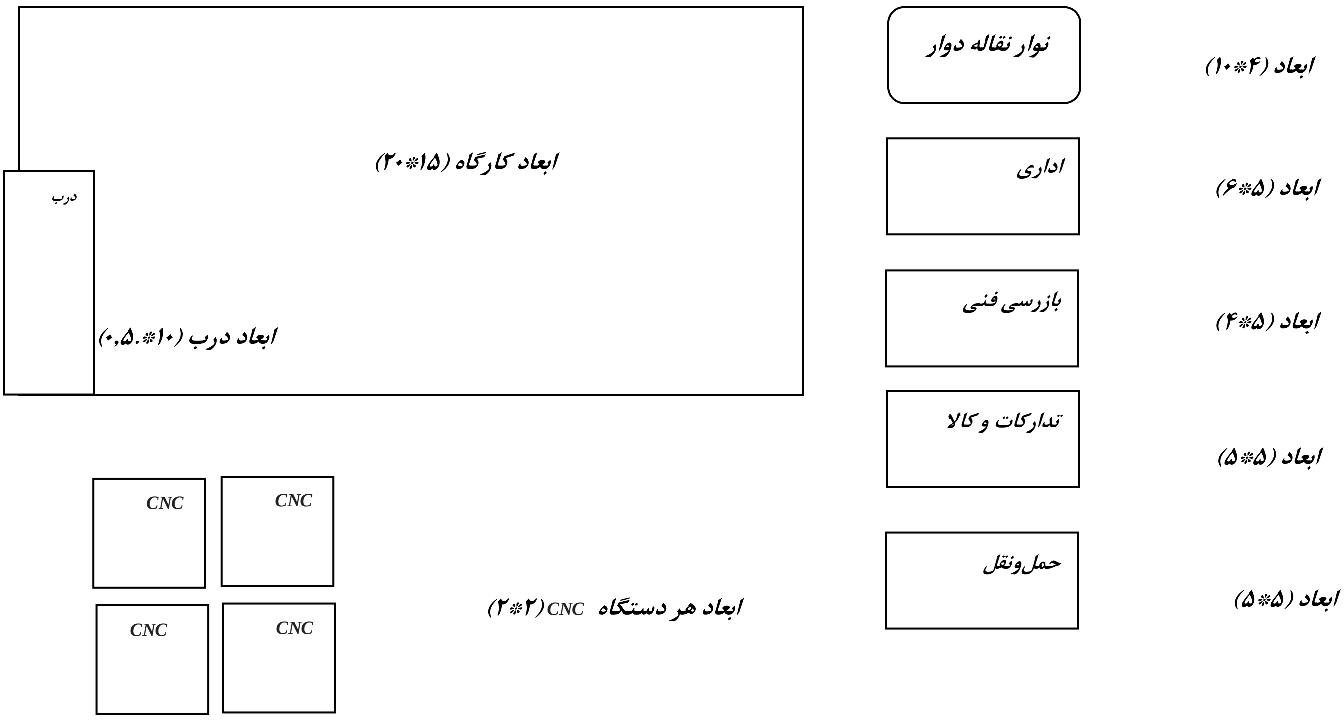
کلید واژه:

طراحی چیدمان؛ مدل‌سازی ریاضی؛ جانمایی؛ بهینه سازی

مقدمه

مساله طراحی چیدمان شامل تعیین ترتیب و موقعیت تعدادی از تسهیلات به گونه‌ای است که مابین تسهیلات، هزینه کل جابجایی مواد، زمان یا هزینه مورد نیاز به حداقل برسد. طراحی چیدمان را می‌توان برای مکان‌یابی یک فرودگاه، یک مدرسه، یک کارخانه تصفیه فاضلاب، یک کتابخانه، یک آشپزخانه و غیره به کار برد. از آنجایی که اکثر مسائل طراحی چیدمان NP-Hard می‌باشند، حل بهینه اینگونه مسائل بسیار مشکل و زمانبر است.[۱] اکثر مسائل طراحی چیدمان تسهیلات در حال حاضر با روش‌های ابتکاری حل می‌شوند.[۲] برای حل اینگونه مسائل، روش‌های متعدد و مدل‌های مختلف چیدمان توسعه داده شده‌اند که برخی جواب بهینه و برخی جواب مناسب نزدیک به بهینه را ارائه می‌کنند.[۳] روش‌هایی مانند شمارش کامل، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی پویا، شاخه و کران و غیره وجود دارند که ارائه دهنده جواب بهینه می‌باشند.[٤]به نظر می‌رسد که مدل‌های پیوسته برای حل مساله چیدمان تسهیلات از مدل‌های دیگر که در نوشته‌ها منتشر شده‌اند، مفیدتر هستند.[٥] در این مقاله تاکید بر بهینه سازی مساله طراحی چیدمان در شرایطی است که در آن برخی از تسهیلات می‌بایست در محدوده دپارتمان‌های مشخص قرار گیرند. در سازمان‌ها خدماتی، دپارتمان به هریک از ادارات که شامل چند زیرمجموعه باشد

گفته می‌شود و در کارخانه به معنای هر بخش تولید که شامل چند زیربخش می‌باشد. برای مثال، در مساله طراحی چیدمان "کارگاه ساخت داخل" در شرکت نفت و گاز اروندان (شکل ۱)، برای تشکیل یک منطقه عملیاتی نیاز است که نوار نقاله دوار و چهار دستگاه یکسان کنترل عددی رایانه‌ای (CNC)، در کنار هم چیدمان شوند که مجموعاً دپارتمان ساخت نامیده می‌شود. همچنین به علت وجود ارتباط بین اجزا و شیوه فرآیند کاری در شرایط مطلوب، نیازمند به طراحی یک بخش مجزا برای انجام کارهای غیرعملیاتی شامل ادارات: تدارکات و کالا، بازرسی فنی، حمل‌ونقل و اداری می‌باشد که می‌بایست در کنار یکدیگر قرار گیرند و دپارتمان ستاد تولید را تشکیل می‌دهند.



شکل ۱. ابعاد کارگاه و تسهیلات موجود در آن

۰. روشهای حل مسایل طراحی چیدمان

به خاطر دامنه گسترده کاربرد مسائل طراحی چیدمان، برای بررسی اینگونه از موضوعات تمایل میان رشته‌ای زیادی وجود دارد. اهم روش‌های موجود برای حل مساله طراحی چیدمان در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند.

۱,۱ مدل تخصیص درجه دوم (QAP)

کوپمنز و بکمن (۱۹۵۷) ارائه کننده ی اولین مدل به نام مدل تخصیص درجه دوم (QAP) بودند که مساله مکان‌یابی برای کارخانه‌هایی که جریان مواد بین آن‌ها در نظر گرفته شده باشد.[۶] آن‌ها مدل‌سازی این مساله را به عنوان مساله تخصیص درجه‌دوم (QAP) معرفی کردند و در آن n مکان به n کارخانه اختصاص داده می‌شود.[۷]

۲,۱ مدل پوشش دار درجه دوم (QSCP)

دومین مدل ارائه شده برای مسائل طراحی چیدمان، مساله پوشش‌دهی درجه‌دوم است. (بازارا و شرالی , ۱۹۸۰) در این حالت، کل فضا به شکل شبکه‌ای گسترده که امکان پوشش دادن آن توسط واحدها در اندازه‌های مختلف وجود دارد، نشان داده می‌شود. هر سلول شبکه‌ای می‌تواند بیش از یک واحد را اشغال کند و اندازه فرمول‌بندی مساله با دقیق‌تر شدن رسم شبکه افزایش می‌یابد.

۳٫۱ رویکردهای برنامه‌ریزی:

علاوه بر QAP و QSCP، چندین مدل برنامه‌ریزی خطی و عدد صحیح دیگر برای این مسائل طراحی شده است. بیشتر مدل‌های صحیح خطی موجود در نوشته‌ها از مدل QAP گرفته شده‌اند.[۸] مدلهای مختلف برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح برگرفته از مدل QAP توسط برکارد (۱۹۸۴) [۹]، کمپ و همکاران (۱۹۹۱) [۱۰]، فریز و یادگار (۱۹۸۳) [۱۱]، لی (۱۹۹۴) [۱۲]، و لاو و همکاران (۱۹۸۸) [۱۳] ارائه شده‌اند.

٤٫۱ رویکرد تئوری گراف

در تئوری گراف فرض بر این است که مطلوبیت مکان‌یابی هر جفت از تسهیلات در مجاورت یکدیگر مشخص است و برای پیدا کردن راه‌حل بهینه، یک گراف مسطح ساخته می‌شود که نحوه مجاورت تسهیلات را نشان می‌دهد و سپس گراف برای به دست آوردن چیدمان نهایی آن تغییر شکل داده می‌شود.[۱۴] دو عیب این رویکرد عبارتند از: (۱) گاهی تبدیل نمودار مجاورت به چیدمان نهایی دشوار می‌باشد، و (۲) گاهی اگرچه گراف ارائه شده بهینه است، ولی چیدمان نهایی لزوما بهینه نیست.[۱۵]

۵٫۱ مدل‌های ریاضی ABS models و LMIP

مدلهای ABS models دسته‌ای از مدلهای ابتکاری ریاضی می‌باشند که با استفاده از محاسبه فاصله پله‌ای و تعریف محدودیت عدم همپوشانی نسبت به جانمایی واحدها اقدام می‌نمایند. مدل‌های چیدمان را می‌توان به مسائل چیدمان یک بعدی و چند بعدی تقسیم بندی نمود.[۱۶]]در این مسائل واحدها در یک یا چند بعد مستقر می‌شوند، بنحوی که هزینه انتقال بین واحدها کمینه گردد. مدل ۱ ABS model یک بعدی است و ۳ ABS model تفاوت مدلسازی کمی با ۲ ABS model در زمینه در نظر گرفتن راهرو، محدودیت فضای کل و شکل مستطیلی واحدها وجود دارد. همچنین مدلهای ریاضی LMIP۱،۲،۳ مربوط به غیرخطی کردن به ترتیب مدلهای ABS Model۱،۲،۳ می‌باشند.[۱۷]

روش‌های طراحی چیدمان مرسوم موجود، برای حل مسائلی با لحاظ نموده محدودیت‌هایی به منظور انجام چیدمان تسهیلات در محدوده دپارتمان‌های مشخص مانند مثال ارائه شده در شکل ۱ مناسب نیستند.

۲. بیان مساله:

یک مساله طراحی چیدمان با نزدیکی یا نزدیک بودن نسبی تسهیلات در رابطه است. این رابطه ممکن است توسط ضرایب "مجاورت" بیان شود، به گونه‌ای که مقادیر بزرگ‌تر Cij نشان‌دهنده نیاز به ارتباط نزدیک‌تر بین تسهیلات i و j و بالعکس باشد.[۱۸] شرط اساسی برای ایجاد یک مدل چیدمان این است که تسهیلات نباید با یکدیگر همپوشانی داشته باشند که آن را می‌توان از لحاظ ریاضی با تعریف سطح همپوشانی A°ij نشان داد. به طور کلی مدل طراحی چیدمان بصورت زیر می‌باشد:

$$Min \sum_{i=۱}^{n-۱} \sum_{j=i+۱}^{n} c_{ij} * \left[\left(x_i - x_j \right)^۲ + \left(y_i + y_j \right)^۲ \right], \qquad (۱)$$

Subject to:

$$A_{ij}^{\circ} \leq ۰, \ for\ i = ۱, \ldots, n-۱, \ \ j = i+۱, \ldots, n, \qquad (۲)$$

xi و yi نشاندهنده مختصات x و y مرکز تسهیل i مورد نظر هستند. در اغلب مدل‌های ابتکاری، تنها محدودیت‌های مربوط به عدم وقوع همپوشانی در نظر گرفته می‌شوند و در واقع تنها برای در نظر گرفتن محدودیت خاص عدم همپوشانی قابل استفاده هستند. اگر محدودیت‌های ضروری و پیچیده دیگری وجود داشته باشد، مانند این محدودیت که برخی تسهیلات باید با هم در یکجا جمع شوند، و یا یک دپارتمان را اجباراً باید در جهت گیری افقی یا عمودی خاصی قرار داد، در آن صورت مدل‌های ابتکاری دیگری باید توسعه یابند که موضوع بررسی در این مقاله می‌باشد. البته هیچ تضمینی وجود ندارد که اگر مساله شامل محدودیت‌های دپارتمانی مذکور باشد، آنگاه یک رویکرد و مدل ابتکاری بتواند به یک

راه‌حل بهینه دست پیدا کند. هدف از این مقاله ارائه روشی جدید برای حل مساله بهینه‌سازی طراحی چیدمان است به نحوی است که چیدمان تسهیلات در محدوده دپارتمان‌های مشخص امکان پذیر باشد.

۳ . مدلسازی با استفاده از تعاریف مسائل طراحی چیدمان

در این بخش فرضیات، ثابت ها و متغیرهای مدل تعریف می شوند.

۱,۳ فرضیات:

فرضیات مورد استفاده در مدلسازی بدین شرح می‌باشند:

الف- تسهیلات به شکل مستطیلی می‌باشند.

ب- اندازه و ابعاد تسهیلات مشخص است.

ج- تمام تسهیلات مورد بررسی در یک "فضای بسته" قرار گرفته‌اند.

د- تسهیلات به گونه ای قرار گرفته‌اند که طرفین آنها به موازات یا عمود بر فضای بسته قرار داشته باشند.

۲,۳ ثابت‌ها:

ثابت‌های مورد استفاده در مدلسازی بدین شرح می‌باشند:

n: تعداد تسهیلات است؛

cij: هزینه سفر به ازای هر واحد مابین تسهیلات **i** و **j** ؛

li: طول طرف طولانی‌تر مربوط به تسهیل **i**؛

si: طول طرف کوتاه‌تر مربوط به تسهیل **i**؛

wt: طول از مبداء مربوط به فضای بسته **t** طی محور **x**؛

ht: عرض از مبداء مربوط به فضای بسته **t** طی محور **y**؛

۳,۳ متغیرها:

متغیرهای مورد استفاده در مدلسازی بدین شرح می‌باشند:

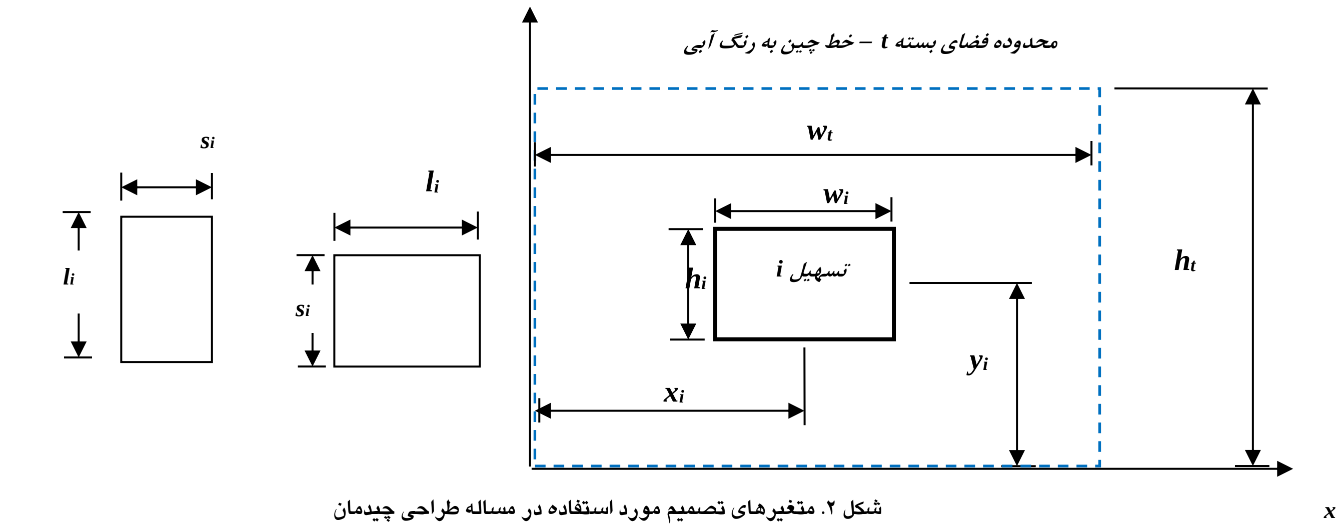
x_i: مختصات طولی مرکز تسهیل i ؛

y_i: مختصات عرضی مرکز تسهیل i؛

w_i: طول تسهیل i طی محور x؛

h_i: عرض تسهیل i طی محور y؛

شکل ۲ ثابت‌ها و متغیرهای تصمیم فوق جهت تخصیص تسهیل **i** را در یک فضای بسته نشان می‌دهد. همانگونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، شکل مستطیل می‌تواند در جهت افقی یا عمودی باشد. مدل ۱ را می‌توان به عنوان مساله بهینه‌سازی چیدمان تعریف نمود.



شکل ۲. متغیرهای تصمیم مورد استفاده در مساله طراحی چیدمان

مدل ۱: با توجه به فرضیات، ثابت ها و متغیرهای این مقاله، مدل ۱ به شرح زیر تعریف شد:

$$Min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} \left(|x_i - x_j| + |\ y_i + y_j|\right), \qquad (۳)$$

$$|x_i - x_j| \geq \tfrac{1}{2}(w_i + w_j) \quad or \quad |y_i - y_j| \geq \tfrac{1}{2}(h_i + h_j), \quad where\ i = 1, \dots, n-1,\ \ j = i+1, \dots, n, \qquad (٤)$$

$$w_i = l_i,\ h_i = s_i \qquad or \qquad w_i = s_i,\ h_i = l_i \quad i = 1, \dots, n, \qquad (٥)$$

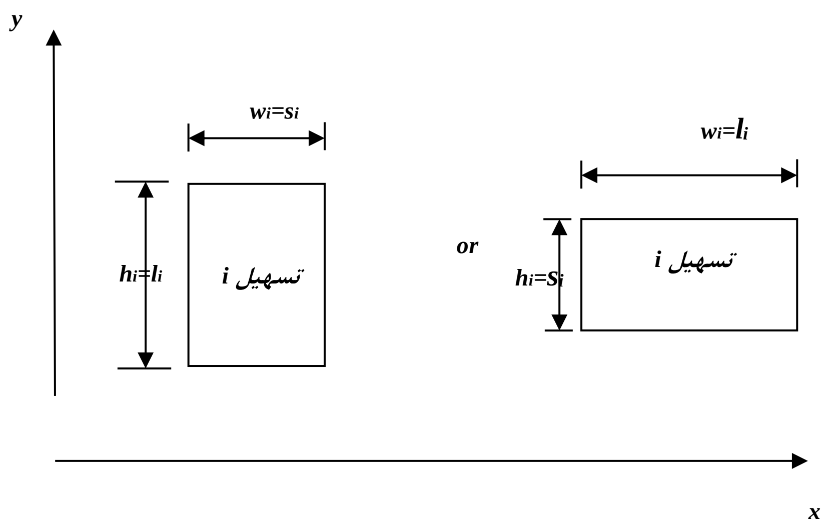
$$x_i + \tfrac{1}{2} w_i \leq w_t, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (٦)$$

$$x_i - \tfrac{1}{2} w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (٧)$$

$$y_i + \tfrac{1}{2} h_i \leq h_t, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (٨)$$

$$y_i - \tfrac{1}{2} h_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (٩)$$

وظیفه تابع هدف و محدودیت یادشده در رابطه (۳) به حداقل رساندن مجموع هزینه سفر بین هر جفت از تسهیلات است. محدودیت‌های (۴) منطقه‌ای که تنها در یک جهت، فاصله بین مراکز دو تسهیلات اختیاری نباید کم‌تر از نصف مجموع ابعاد آن جهت باشد را مشخص می‌نماید و تضمین می‌کنند که هیچ دو تسهیلاتی در جهات x یا y با یکدیگر همپوشانی نداشته باشند. همانگونه که در شکل ۳ نیز توصیف شده بود، دو جهت ممکنه برای هر یک از تسهیلات توسط محدودیت‌های (۵) تعریف می‌شوند. محدودیت‌های (۶) تا (۹) جانمایی تسهیلات را در فضای محدوده مساله محدود می‌کنند.



شکل ۳. جهت گیری‌های ممکن برای هر تسهیل

برای به دست آوردن یک راه‌حل بهینه سراسری در بیشتر مواقع نمی‌توان مدل ۱ را به کار برد، زیرا تابع هدف و محدودیت‌های (۴) و (۵) غیر خطی هستند. از اینرو مساله باید به حالت خطی تبدیل شود تا دستیابی به جواب بهینه سازی سراسری امکانپذیر گردد. براساس تکنیک‌های برنامه‌ریزی آرمانی[۱۹]، ابتدا متغیرهای زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{ij^+} = \begin{cases} (x_i - x_j) & if \quad (x_i - x_j) > 0, \\ 0 & if \quad (x_i - x_j) \le 0, \end{cases} \qquad (۱۰)$$

$$x_{ij^-} = \begin{cases} -(x_i - x_j) & if \quad (x_i - x_j) < ۰, \\ ۰ & if \quad (x_i - x_j) \ge ۰, \end{cases} \qquad (۱۱)$$

$$y_{ij^+} = \begin{cases} (y_i - y_j) & if \quad (y_i - y_j) > ۰, \\ ۰ & if \quad (y_i - y_j) \le ۰, \end{cases} \qquad (۱۲)$$

$$y_{ij^-} = \begin{cases} -(y_i - y_j) & if \quad (y_i - y_j) < ۰, \\ ۰ & if \quad (y_i - y_j) \ge ۰, \end{cases} \qquad (۱۳)$$

سپس با استفاده از روابط (۱۰) تا (۱۳)، عبارات قدر مطلقی تابع هدف (۳) به صورت زیر خطی می‌گردند:

$$|x_i - x_j| = x_{ij^+} + x_{ij^-}, \qquad |y_i - y_j| = y_{ij^+} + y_{ij^-} \ , \qquad (۱٤)$$

در شرایطی که

$$(x_i - x_j) = x_{ij^+} - x_{ij^-}, \qquad (y_i - y_j) = y_{ij^+} - y_{ij^-} \ . \qquad (۱٥)$$

اکنون محدودیت‌های (۴) و (۵) را با گزاره‌های ۱ و ۲ به شرح زیر خطی می‌کنیم:

گزاره ۱ : همانگونه که ذکر شد محدودیت‌های (۴) تضمین می‌کنند هیچ دو تسهیلاتی در جهات x یا y با یکدیگر همپوشانی نخواهند داشت.

بنابراین با معرفی دو متغیر صفر و یک با عناوین: ptj و qij که به طبقه‌بندی روابط فضای ممکن چیدمان برای تسهیلات i و j کمک می‌کنند، می‌توان محدودیت‌های (۴) را به محدودیت‌های خطی زیر تبدیل نمود:

$$(x_i - x_j) + Mp_{ij} + Mq_{ij} \geq \frac{1}{2}(w_i - w_j), \qquad (16)$$

$$-(x_i - x_j) + Mp_{ij} + M(1 - q_{ij}) \geq \frac{1}{2}(w_i - w_j), \qquad (17)$$

$$(y_i - y_j) + M(1 - p_{ij}) + Mq_{ij} \geq \frac{1}{2}(h_i - h_j), \qquad (18)$$

$$-(y_i - y_j) + M(1 - p_{ij}) + M(1 - q_{ij}) \geq \frac{1}{2}(h_i - h_j), \qquad (19)$$

که در محدودیت‌های جدید M یک عدد ثابت به شرح ذیل است:

$$M = Max\left\{\frac{1}{2}(w_i + w_j) + \mathrm{w_t} \ ,\frac{1}{2}(h_i + h_j) + h_t\right\}. \qquad (20)$$

جدول ۱. تحلیل محدودیت‌های ارائه شده جدید بر اساس رابطه شماره (۴).

Value	$p_{ij} = 0$	$p_{ij} = 1$
$q_{ij}=0$	$(x_i - x_j) \geq \frac{1}{2}(w_i + w_j)$	$(y_i - y_j) \geq \frac{1}{2}(h_i + h_j)$
$q_{ij}=1$	$-(x_i - x_j) \geq \frac{1}{2}(w_i + w_j)$	$-(y_i - y_j) \geq \frac{1}{2}(h_i + h_j)$

اثبات:

حالت اول) اگر pij = qij=۰ باشد، آنگاه نابرابری‌های زیر بدست می‌آیند:

$$(x_i - x_j) \geq \frac{1}{2}(w_i + w_j), \qquad (21)$$

$$-(x_i - x_j) + \mathrm{M} \geq \frac{1}{2}(w_i + w_j), \qquad (22)$$

$$(y_i - y_j) + M \geq \frac{1}{2}(h_i + h_j), \qquad (23)$$

$$-(y_i - y_j) + 2\square \geq \frac{1}{2}(h_i + h_j), \qquad (24)$$

که در آن تنها محدودیت (۲۱) یک محدودیت فعال است؛ سه نابرابری دیگر واقعی، ولی غیر فعال هستند. این بدان دلیل است که **M** در حالت (۲۰) تعریف شده است به طوری که نابرابری‌های (۲۲) تا (۲۴) به طور خودکار غیرفعال می‌گردند.

حالت دوم) در صورتی که pij=۰ و qij=۱ باشد، تنها محدودیت زیر فعال است:

$$-(x_i - x_j) \geq \frac{1}{2}(w_i + w_j). \qquad (۲۵)$$

حالت سوم) اگر pij =۱ و qij =۰ باشد، تنها محدودیت زیر فعال است:

$$(y_i - y_j) \geq \frac{1}{2}(h_i + h_j). \qquad (۲۶)$$

حالت چهارم) اگر pij = ۱ و qij =۱ باشد، تنها محدودیت زیر فعال است:

$$-(y_i - y_j) \geq \frac{1}{2}(h_i + h_j), \qquad (۲۷)$$

گزاره ۲ : با معرفی متغیر صفر و یک (α_i)، محدودیت‌های (۵) را می‌توان بصورت زیر خطی کرد:

$$w_i = \alpha_i l_i + (1 - \alpha_i) s_i, \quad h_i = (1 - \alpha_i) l_i + \alpha_i s_i. \qquad (۲۸)$$

اثبات:

(۱) اگر $\alpha_i = 0$ باشد، در این حالت مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$w_i = s_i, \quad h_i = l_i. \qquad (۲۹)$$

(۲) اگر $\alpha_i = 1$ باشد، در این حالت مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$w_i = l_i, \quad h_i = s_i. \qquad (۳۰)$$

براساس روابط تبدیلی بالا، مدل ۱ به مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط که مدل ۲ نامیده می‌شود تبدیل می‌شود.

۳. ۳ تعریف مدل ۲

با استفاده از مدل ۱ و گزاره ۱ و گزاره ۲، مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط به شرح ذیل تعریف شد.

$$Min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} \left(x_{ij^+} + x_{ij^-} + y_{ij^+} + y_{ij^-}\right), \qquad (۳۱)$$

محدودیت‌ها و تعداد آنها به شرح زیر می‌باشند:

الف- محدودیت‌های مابین تسهیلات درون محدوده مساله که همان محدودیت‌های شماره (۶) تا (۹) می‌باشند و تعداد آنها ۴□ است؛

ب- محدودیت هایی که برای خطی سازی تابع هدف تعریف شدند و مطابق رابطه شماره (۱۵) می‌باشند. تعداد این محدودیت‌ها در بیشتر موارد n(n-1) است.

ج- محدودیت‌های تضمین عدم همپوشانی بین تسهیلات که همان محدودیت‌های هستند که در رابطه شماره (۱۶) تا (۲۰) ذکر شد. تعداد متغیرهای ۰ - ۱ و محدودیت‌های مربوط به آن n(n-۱) و (۱-)۲ می‌باشند.

د- محدودیت‌های مربوط جهت‌گیری واحدها که در رابطه شماره (۲۸) تعریف شد. تعداد متغیر ۰ - ۱ و محدودیت‌های مربوطه به ترتیب n و ۲ است.

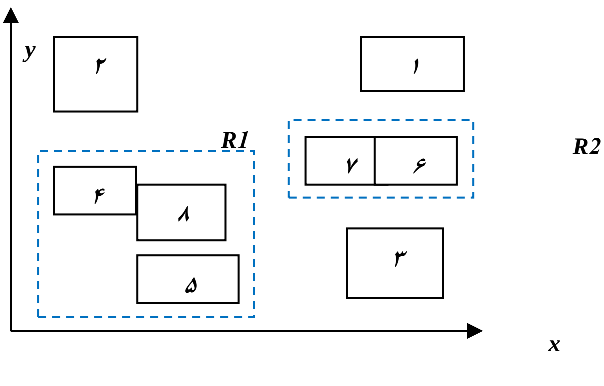
مدل ۲ یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط است و می‌تواند برای رسیدن به یک راه‌حل بهینه سراسری توسط نرم‌افزارهای موجود مانند لیندو و لینگو حل شود.

٤. بررسی عملی نتایج

در این بخش مدل سازی با در نظر گرفتن محدودیت‌های مدل ۲ بصورت عملی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا تعریف روابط محدودیت‌های دپارتمانی مدل به صورت مفصل تر توضیح داده شده است و سپس حل یک مثال عملی ارائه می‌گردد.

٤.١ تعریف روابط محدودیت‌های دپارتمانی

دپارتمان به عنوان مجموعه‌ای از چند تسهیل مربوط به هم تعریف می‌شود که آن تسهیل‌ها نیازمندند که در یک منطقه مستطیلی ثابت که همان محدوده دپارتمان آن تسهیلات است، چیدمان گردند و بدیهی است که در آن منطقه مستطیلی هیچ تسهیلات دیگری را نمی‌توان قرار داد. در این مقاله منطقه مستطیلی مذکور "مستطیل مجازی" نامیده می‌شود. مستطیل مجازی به عنوان یک فضای بسته مستقل و به عبارتی یک بخش ویژه که خود شامل چند واحد است، در نظر گرفته می‌شود. برای مثال، در شکل شماره ۴، تعداد ۸ تسهیل در فضای محدوده مساله وجود دارند. تسهیلات شماره ۶ و ۷ بر اساس نیاز عملی تصمیم گیر مساله، در واقع مجموعه واحدهای یک دپارتمان هستند که در یک مستطیل مجازی بنام Rl قرار گرفته اند، و تسهیلات ۴، ۵ و ۸ از مجموعه تسهیلات دپارتمان دیگری هستند که در مستطیل مجازی دیگری بنام R۲ جای گرفته اند. ابعاد Rl و R۲ ثابت هستند اما محل آن‌ها باید تعیین شود. برای آنکه تسهیلات مربوط به هر دپارتمان در کل فضای مساله پراکنده نباشند و نیز به منظور کاهش تداخل با سایر مناطق کاری، نیاز است که آن‌ها در کنار یکدیگر در یک دپارتمان و در مکانی متمرکز و متفاوت با سایر دپارتمان‌ها و واحدها چیدمان گردند. به عبارتی تسهیلات ۱، ۲ و ۳ نباید به Rl یا R۲ اختصاص داده شوند. برای تسهیلاتی که در یک مستطیل مجازی قرار دارند، محدودیت‌هایی مورد نیاز است تا اطمینان حاصل شود که آن‌ها در درون مستطیل مجازی با یکدیگر همپوشانی ندارند که در واقع همان محدودیت هایی هستند که قبلاً در محدودیت‌های (۶) تا (۹) مدل ۲ ذکر شده اند.



شکل ٤. مستطیل‌های مجازی.

از اینرو محدودیت‌های عدم‌همپوشانی برای تسهیلات ۶ و ۷ در Rl، که در شکل ۴ نشان‌داده شده‌است، مطابق با روابط (۱۶) تا (۱۹) به صورت زیر خواهند بود:

$$(x_٦ - x_٧) + Mp_{٦٧} + Mq_{٦٧} \geq \frac{١}{٢}(w_٦ + w_٧). \quad (٣٢)$$

$$-(x_٦ - x_٧) + Mp_{٦٧} + M(١ - q_{٦٧}) \geq \frac{١}{٢}(w_٦ + w_٧). \quad (٣٣)$$

$$(y_٦ - y_٧) + M(١ - p_{٦٧}) + Mq_{٦٧} \geq \frac{١}{٢}(h_٦ + h_٧). \quad (٣٤)$$

$$-(y_٦ - y_٧) + M(١ - p_{٦٧}) + M(١ - q_{٦٧}) \geq \frac{١}{٢}(h_٦ + h_٧). \quad (٣٥)$$

برای تسهیلاتی که در یک مستطیل مجازی مشترک قرار دارند، برای اطمینان از اینکه آن تسهیلات نیز در درون مستطیل مجازی مشترک با یکدیگر همپوشانی نداشته باشند محدودیت‌هایی مشابه محدودیت‌های (۶) تا (۹) مورد نیاز است. البته برای تعریف محدودیت‌های عدم همپوشانی بین تسهیلات در درون مستطیل مجازی مشترک، می‌توان محدودیت‌های (۶) تا (۹) را به صورت زیر تغییر داد:

$$x_i + \frac{١}{٢}w_i \leq v_{x1} + \frac{١}{٢}v_{w1}, \quad i = ٦,٧, \quad (٣٦)$$

$$x_i - \frac{١}{٢}w_i \geq v_{x1} + \frac{١}{٢}v_{w1}, \quad i = ٦,٧, \quad (٣٧)$$

$$y_i + \frac{١}{٢}h_i \leq v_{y1} + \frac{١}{٢}v_{h1}, \quad i = ٦,٧, \quad (٣٨)$$

$$y_i - \frac{١}{٢}h_i \geq v_{y1} + \frac{١}{٢}v_{h1}, \quad i = ٦,٧, \quad (٣٩)$$

که در آنها متغیرها به این صورت تعریف شدند:

v_{xl}: مختصات x مربوط به مرکز R۱ است،

$v_{y١}$: مختصات y مربوط به مرکز R۱ است؛

v_{wl}: ابعاد R۱ در طول جهت x است؛

v_{hl}: ابعاد R۱ در طول مسیر y است.

همانگونه که در شکل ۴ مشخص است، تسهیل شماره ۳ تسهیلی خارج از مستطیل مجازی R۱ است. از اینرو محدودیت‌های مورد نیاز برای اطمینان از این که تسهیل شماره ۳ با تسهیلات ۶ و ۷ همپوشانی نداشته باشد نیز با محدودیت‌های همپوشانی (۱۶) تا (۲۰) متفاوت هستند. بنابراین محدودیت‌های مذکور به شکل محدودیت‌های (۴۰) تا (۴۳) تغییر می‌یابند:

$$(v_{x1} - x_٣) + M\mathrm{v}_{p_{١٣}} + M\mathrm{v}_{q_{١٣}} \geq \frac{١}{٢}(v_{w1} + w_٣), \quad (٤٠)$$

$$-(v_{x1} - x_٣) + M\mathrm{v}_{p_{١٣}} + M(١ - \mathrm{v}_{q_{١٣}}) \geq \frac{١}{٢}(v_{w1} + w_٣), \quad (٤١)$$

$$(v_{y1} - y_٣) + M(١ - \mathrm{v}_{p_{١٣}}) + M\mathrm{v}_{q_{١٣}} \geq \frac{١}{٢}(v_{h1} + h_٣), \quad (٤٢)$$

$$-(v_{y1} - y_٣) + M(١ - \mathrm{v}_{p_{١٣}}) + M(١ - \mathrm{v}_{q_{١٣}}) \geq \frac{١}{٢}(v_{h1} + h_٣), \quad (٤٣)$$

که v_{p13} و v_{q13} متغیرهای صفر و یکی هستند که توابع مشابه آن‌ها بصورت pij و qij در جدول ۱ توصیف شده است. بدیهی است که تسهیلات ۶ و ۷ در این محدودیت‌ها وجود نخواهند داشت. این بدان دلیل است که اگر تسهیلات ۳ با R۱ همپوشانی نداشته باشد، با تسهیلات ۶ و ۷ نیز هم پوشانی ندارد. یکی از مزایای اصلی استفاده از محدودیت دپارتمانی این است که تعداد متغیرهای ۰ - ۱ و محدودیت‌های همپوشانی را در مسائل طراحی چیدمان تسهیلات کاهش می‌دهد. برای ارزیابی این موضوع مساله یادشده را مورد بررسی بیشتری قرار می‌دهیم. الف) اگر تعداد ۸ تسهیلات موجود در شکل ۴، بدون درنظر گرفتن شکل مستطیل مجازی در محدوه مساله اختصاص داده شوند، آنگاه تعداد متغیرهای ۰ - ۱ و تعداد محدودیت‌های مورد نیاز برای حل مساله در ردیف اول جدول ۲ ذکر شده اند. ب) سپس همان مساله با در نظر گرفتن مستطیل‌های مجازی ترسیم شده در شکل ۴ بررسی شد، به نحوی که تسهیلات ۶، ۷ به عنوان R۱ و تسهیلات ۴، ۵ و ۸ در دپارتمانی دیگر به عنوان R۲ در نظر گرفته شدند. بر این اساس تعداد محدودیت‌ها و تعداد متغیرهای ۰ - ۱ بدست‌آمده در ردیف دوم جدول ۲ ذکر گردیدند. همانگونه که مشاهده می‌شود تعداد محدودیت‌ها و تعداد متغیرهای ۰ – ۱ کاهش یافته اند. در مسائل عملی هرچه تعداد تسهیلات و دپارتمان ها بیشتر باشد، میزان کاهش تعداد محدودیت‌ها و تعداد متغیرها نیز بیشتر خواهد بود.

جدول ۲. تعداد متغیرهای صفر و یک و محدودیت‌های عدم همپوشانی برای مساله شکل ٤.

تسهیلات	تعداد متغییرهای صفر و یک	تعداد محدودیت ها
بدون در نظر گرفتن مستطیل مجازی	٥٦	١٢٨
با در نظر گرفتن مستطیل های R1 و R2.	٢٨	٥٦

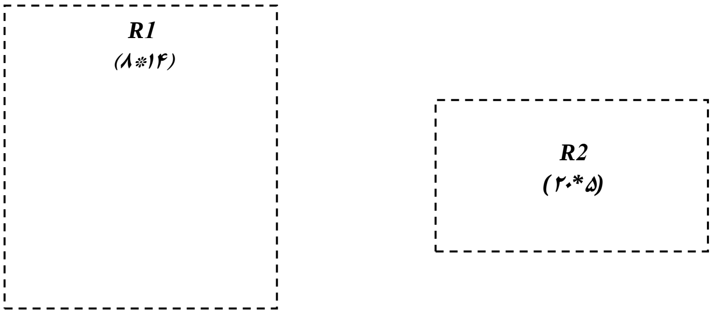
٤.٢ حل مثال

برای مثال مساله طراحی چیدمان برای کارگاهی که در شکل ۱ طرح شده بود بررسی می‌گردد. تسهیلاتی که باید چیدمان گردند شامل الف. یک نوار نقاله دوار ، ب. چهار دستگاه یکسان کنترل عددی رایانه‌ای (CNC)، ج. تدارکات و کالا، د. بازرسی فنی، هـ حمل‌ونقل و ز. اداری می‌باشد که می‌بایست در کنار یکدیگر در فضای کارگاه قرار داده شوند. ابعاد قبلاً در شکل ۱ ذکر شده‌اند و هدف ما به حداقل رساندن فاصله وزنی بین تسهیلات است. همچنین بر اساس نیاز عملی کارگاه، برخی محدودیت‌ها به شرح زیر وجود دارند که باید در نظر گرفته شوند و عبارتند از:

(۱) تسهیلات نوار نقاله دوار و چهار دستگاه یکسان کنترل عددی رایانه‌ای (CNC)، می‌بایست در یک دپارتمان و در کنار هم قرار گیرند تا یک منطقه عملیاتی که منتهی به درب می‌شود را تشکیل دهند.

(۲)تسهیلات تدارکات و کالا، بازرسی فنی، حمل‌ونقل و اداری می بایست در یک دپارتمان و در کنار هم قرار گیرند تا یک دپارتمان ستاد تولید را تشکیل دهند.

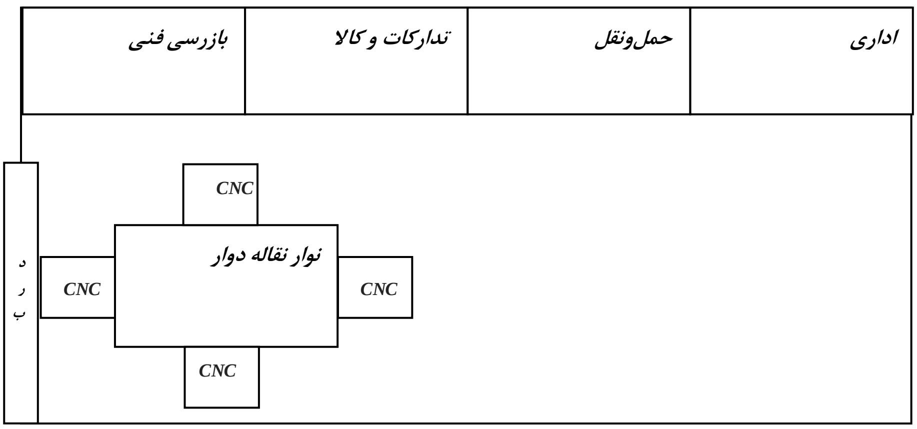
در این مساله برای تعریف محدودیت دپارتمانی می‌بایست دو مستطیل مجازی برای حل محدودیت‌های فوق اضافه گردند که در شکل ۵ نشان‌داده شده‌اند. مستطیل Rl شامل یک میز و چهار صندلی برای ایجاد منطقه ساخت است و R۲ شامل منطقه ستاد تولید است. ابعاد دپارتمان‌ها باید به اندازه کافی بزرگ باشد که بتواند تسهیلات داخل هر مستطیل مجازی را در خود جای دهد. هزینه جابجایی مابین هر جفت از تسهیلات در جدول ۳ ذکر شده‌اند. با استفاده از مدلسازی پیشنهاد شده در مدل شماره ۲، و با استفاده از نرم افزار لینگو ورژن ۱۴ به نتیجه بهینه نشان‌داده‌شده در شکل (۶) دست یافته شد.



شکل ۵. مستطیل‌های مجازی برای دپارتمان های مربوط به شکل ۱

جدول ۳. هزینه جابجایی بین هر جفت تسهیلات

عنوان	وزن						
	اداری	حمل‌ونقل	تدارکات و کالا	بازرسی فنی	درب	CNC	نوار نقاله دوار
نوار نقاله دوار	۰	۰	۰	۰	۱	٦	۰
CNC	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
درب	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
بازرسی فنی	۲	۱	٦	۰	۰	۰	۰
تدارکات و کالا	۳	٤	۰	۰	۰	۰	۰
حمل‌ونقل	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰
اداری	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰



شکل ٦. طراحی چیدمان نهایی کارگاه.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با تعریف روابطی اقدام به طراحی مدل ریاضی برای بهینه سازی طراحی چیدمان گردید. سپس از برنامه‌نویسی عدد صحیح مختلط و تکنیک‌های برنامه‌ریزی آرمانی برای تبدیل مساله بهینه‌سازی طراحی چیدمان به یک مدل خطی معادل با آن استفاده شد. دو مزیت مدل پیشنهادی بدین شرح است:

(۱) این امکان را فراهم می‌سازد که محدودیت‌های عملی موجود و مورد نیاز برای دسته‌بندی تسهیلات در نظر گرفته شوند، که در روش‌های فعلی به طور موثر قابل دستیابی نمی‌باشد. طبق تجربه نیاز به قرار دادن چند تسهیل در دپارتمان، عملگرایانه است.

(۲) استفاده از محدودیت‌های دپارتمانی می‌تواند کارایی محاسباتی را به دلیل کاهش تعداد محدودیت‌های همپوشانی بهبود بخشد.

با توجه به ویژگی **NP-hard** اینگونه مسائل، موضوع مهمی که برای مطالعه آتی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد آن است که برای طراحی چیدمان مسائلی که دارای تعداد تسهیلات زیادی هستند، چگونه می‌توان مدلسازی را با استفاده از محدودیت دپارتمانی با استفاده از سایر انواع مدلسازی نظیر **LMIP** و یا **ABSmodel** توسعه داد.

منابع

[۱] Apple,J.M., and M.p.Deisenroth. (1972). A Computerized Plant Layout Analysis and Evaluation Technique_Planet. Proceedings of AIIE Annual conference.
[۲] Li, H.-L., & Hsieh, M.-C. (1998). Solving Facility-Layout Optimization Problems with Clustering Constraints. Environment and Planning B: Planning and Design, 25(2), 299–308.
[۳] H. A. Eiselt, Vladimir Marianov (eds.). (2011). Foundations of Location Analysis Springer, Page ۳۳۵.
[۴] Francis, R. L., and J. A. White. (1992). Facility Layout and Location: An Analytical Approach. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
[۵] Heragu, S. (1991). Efficient models for the facility layout problem. European Journal of Operational Research 53. 1-13.
[۶] Dileep R. Sule. (2008). MANUFACTURING FACILITIES; Location, Planning, and Design. CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group, Page 293.
[۷] Koopmans T C, Beckman M, 1957, "Assignment problems and the location of economic activities" Econometrica 25 53 - 76.
[۸] Bazaraa M S, Sherali M D, 1980, "Benders' partitioning scheme applied to a new formulation of the quadratic assignment problem" Naval Research Logistics Quarterly 27(1) 29-41
[۹] Burkard R E, 1984 Discrete Location Theory (Academic Press, New York).
[۱۰] Camp D J, Carter M W, Vannelli A, 1991, "A nonlinear optimization approach for solving facility layout problems" European Journal of Operational Research 57 174-189
[۱۱] Frieze A M, Yadegar J, 1983, "On the quadratic assignment problem" Discrete Applied Mathematics 5 89-98.
[۱۲] Li H L, 1994, "A global approach for nonlinear mixed discrete programming in design optimization" Engineering Optimization 22 109 -122.
[۱۳] Love R F, Morris J G, Wesolowsky G 0,1988 Facilities Location: Models and Methods (North-Holland, New York).
[۱۴] Seppanen J J, Moore J M, 1970, "Facilities planning in graph theory" Management Science ۱۷ ۲۵۳-۲۴۲.
[۱۵] Foulds L R, Gibbons P B, Giffin J W, 1985, "Facilities layout adjacency determination: an experimental comparison of three graph theoretic heuristics" Operations Research 331091 -1106
[۱۶] Heragu, S. (2018). Facilities Design. Boston, MA: CRC Press Publishing Company, Page 385-۳۸۶.

[۱۷] Meyers, F. E. (2000). Manufacturing Facilities Design and Material Handling. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

[۱۸] R Murray-Smith, T. (1997). Johansen. Multiple Model Approaches To Nonlinear Modelling And Control. Taylor & Francis Ltd, Group, Page 321.

[۱۹] Namhauser G L, Rinnooy Kan A H G, Todd M J, 1989 Optimization (North-Holland, New York)