مقاله پژوهشی

ماتزدایی تصاویر طیف خاکستری با استفاده از بهینه‌سازی مقاوم در شرایط عدم قطعیت در پارامترهای مدل ماتشدگی

زینب محمدی، ابراهیم دانشی‌فر، عباس ابراهیمی مقدم و مرتضی خادمی

چکیده: **امروزه یکی از مهم‌ترین مسایل حوزه پردازش تصویر، ماتزدایی تصاویر ماتشده است. ماتزدایی تصویر با توجه به مجهول یا معلوم‌بودن کرنل ماتکننده، به ترتیب، به دو دسته ماتزدایی کور و ماتزدایی غیر کور تقسیم می‌شود. در ماتزدایی کور، هم‌زمان با تخمین تصویر، کرنل ماتکننده هم باید تخمین زده شود که همین امر، باعث افزایش هزینه محاسباتی فرایند ماتزدایی می‌شود. ماتزدایی غیر کور تصاویر یک مسأله بدوضع از میان مسایل معکوس خطی است و در نتیجه برای تخمین تصویر از مسایل بهینه‌سازی استفاده می‌شود. معمولاً روش‌های ماتزدایی غیر کور، فرض می‌کنند که کرنل ماتکننده بدون خطا است، اما در عمل دانش ما از کرنل ماتکننده دارای عدم قطعیت است. از این رو، در این مقاله ما یک روش ماتزدایی «نیمه‌کور» را ارائه داده‌ایم که روشی جدید برای ماتزدایی می‌باشد. این ایده بین روش ماتزدایی کور و غیر کور قرار می‌گیرد و در اصل نگاهی واقع‌گرایانه به مسأله ماتزدایی دارد. در روش پیشنهادی، نه همه اطلاعات فرایند تخریب‌کننده تصویر را مفروض گرفته‌ایم و نه چنین است که هیچ اطلاعاتی در مورد این فرایند ندانیم. مدل بهینه‌سازی مقاوم پیشنهادی به دنبال فیلتری برای ماتزدایی تصویر است که بتواند در بدترین حالت، یعنی وجود حداکثری عدم قطعیت در مورد کرنل ماتکننده، جوابی با کمترین خطای ممکن به دست آورد. بر مبنای نتایج شبیه‌سازی‌ها برای دو تصویر، مدل نیمه‌کور پیشنهادی ما می‌تواند بیش از ٤ دسی‌بل بهبود PSNR در مقایسه با روش‌های ماتزدایی کور داشته باشد.**

کلیدواژه: **بهینه‌سازی بدترین حالت، بهینه‌سازی مقاوم، ماتزدایی نیمه‌کور، فیلتر ماتزدایی تصویر.**

۱- مقدمه

امروزه با گسترش روزافزون روش‌های مختلف اخذ اطلاعات مانند پویشگرها و دوربین‌های دیجیتال، پردازش تصویر کاربرد فراوانی یافته است. تصویر به هنگام ثبت، ضبط، فشرده‌سازی و ارسال، آلوده به اغتشاش می‌شود و همین امر، وضوح تصویر را کاهش می‌دهد و سبب بروز ماتشدگی[1] در تصویر می‌شود. ماتشدن تصویر به عوامل مختلفی از جمله لرزش دست عکاس، شرایط جوی و محیطی، خارج‌شدن از فاصله کانونی لنز دوربین، کیفیت محدود دوربین و خطاهای انتقال بستگی دارد. تصویر ماتشده، کیفیت خود را از دست می‌دهد و برخی از جزئیات تصویر، غیر قابل تشخیص می‌شوند [۱].

بازیابی[2] تصویر که به روند بازسازی یک تصویر اولیه از یک نسخه تخریب‌شده اشاره دارد، مسئله‌ای کلیدی در سیستم‌های تصویربرداری مدرن و برنامه‌های کاربردی مرتبط با تصویربرداری است. روش‌های ماتزدایی[3] در طی فرایندی پیچیده، پدیده ماتشدگی را مدل و با اجرای فرایند معکوس سعی در تخمین تصویر اولیه می‌نمایند [۱].

مسأله ماتزدایی به عنوان یک مسأله بدوضع[4] شناخته می‌شود. بنا بر وضعیت جواب مسایل محاسباتی، یعنی وجود، یکتایی و یا وضعیت پایداری جواب (یا به عبارت دیگر پیوستگی تابع جواب بر حسب تغییرات داده‌های ورودی)، مسایل محاسباتی به دو دسته خوش‌وضع و بدوضع تقسیم می‌شوند. در صورت عدم برقراری یکی از شرایط مذکور، مسأله بدوضع ایجاد می‌شود که حل آن نیازمند تمهیدات ویژه است. در مسأله بدوضع تغییرات کوچک در تصویر اصلی می‌تواند باعث اعوجاج بزرگ در خروجی (تصویر بازیابی‌شده) بوده و یا به بیش از یک جواب برای مسأله منجر شود [۲].

ماتشدگی تصویر، به وسیله کانولوشن کرنل ماتکننده (PSF)[5] با تصویر اصلی، مدل می‌شود. برای ماتزدایی از اصطلاح «دکانولوشن[6]» نیز استفاده می‌شود. دکانولوشن، فرایند معکوس اثر کانولوشن است. عملیات دکانولوشن با توجه به معلوم یا مجهول‌بودن PSF به دو دسته ماتزدایی غیر کور و ماتزدایی کور تقسیم می‌شود.

در سناریوهای ماتزدایی غیر کور تصاویر، با این که PSF شناخته‌شده است، ماتزدایی تصویر به دلیل ماهیت بدوضعی مسأله، چالش‌برانگیز است. روش‌های غیر کور در کارهایی مانند [۲] و [۳] پیشنهاد شده‌اند که در آنها با استفاده از اطلاعات پیشین در مورد تصویر که در چارچوب «بیزین» یا حداکثر احتمال پسین (MAP)[7] مورد استفاده قرار می‌گیرد، بر این مشکل غلبه شده و ماتزدایی تصویر انجام می‌شود. در [۴] ماتزدایی غیر کور با روش تغییرات کامل (TV)[8] ارائه شده است. چگونگی انتخاب پارامترها به صورت انطباقی برای تنظیم، یک مشکل بزرگ است. برای

این مقاله در تاریخ ۲۳ اردیبهشت ماه ۱۳۹۸ دریافت و در تاریخ ۲۰ شهریور ماه ۱۳۹۹ بازنگری شد.

زینب محمدی، گروه برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، (email: z.mohammadi@mail.um.ac.ir).

ابراهیم دانشی‌فر، گروه مهندسی پزشکی، دانشکده مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع)، مشهد، ایران، (email: ebrahim@imamreza.ac.ir).

عباس ابراهیمی مقدم (نویسنده مسئول)، گروه برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، (email: a.ebrahimi@um.ac.ir).

مرتضی خادمی، گروه برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، (email: khademi@um.ac.ir).

1. Blur
2. Reconstruction
3. Deblurring
4. Ill-Posed Problem
5. Point Spread Function
6. Deconvolution
7. Maximum a Posteriori
8. Total Variation

این کار از TV مبتنی بر شبکه عمیق استفاده می‌کند تا بهترین پارامترها را به صورت انطباقی برای تنظیم، آموزش دهد.

مات‌زدایی کور تصویر به طور قابل توجهی چالش‌برانگیز است زیرا در آن PSF ناشناخته است. در این روش با استفاده از اطلاعات مربوط به فرایند تصویربرداری، به تخمین تصویر اصلی و PSF می‌پردازند. از آنجایی که مسأله مات‌زدایی کور، بدوضع است (به علت داشتن تعداد نامحدودی از راه حل‌ها)، معمولاً محدودیت‌های بیشتری را برای PSF جهت مات‌زدایی تصویر اعمال می‌کنند. به عنوان مثال در آثاری مانند [۳] و [۵]، PSF به حرکت و عدم تمرکز نیز محدود شده است.

بیشتر الگوریتم‌های مات‌زدایی کور از یک پروسه تکرارپذیر که متناوباً به تخمین PSF و تصویر جواب می‌پردازد، استفاده می‌کنند. در طول پروسه، PSF تخمین زده می‌شود و سپس این PSF برای تخمین تصویر جواب استفاده می‌شود، به این صورت که از PSF به دست آمده و تصویر مات‌شده، توسط اجرای یک مات‌زدایی غیر کور، تصویر جواب حاصل می‌شود. این تخمین جدید و بهبودیافته از تصویر، برای تخمین PSF در تکرار بعدی استفاده می‌شود [۶]. در [۷] و [۸] از الگوریتم‌های تکرارپذیر برای مات‌زدایی کور استفاده شده است. در [۹] ابتدا PSF را با استفاده از تصویر ورودی و الگوریتم بهینه‌سازی تنک پیشنهادشده، تخمین می‌زند و سپس به‌وسیله بازیابی غیر کور در جستجوی تصویر اولیه با استفاده از بازیابی غیر کور با توزیع لاپلاسین مبتنی بر اطلاعات پیشین می‌باشد. در [۱۰] مات‌زدایی کور بر اساس حداکثر گرادیان محلی (LMG) پیشین ارائه می‌شود. هم از نظر ریاضی و هم از نظر تجربی ثابت شده که مات‌شدگی باعث کاهش مقدار حداکثری گرادیان تکه‌های محلی می‌شود. این خاصیت ذاتی فرایند مات‌شدن، منجر به یک مسأله بهینه‌سازی جدید می‌شود. بنابراین یک بهینه‌سازی مؤثر را به همراه یک عملگر خطی برای محاسبه حداکثری گرادیان محلی، پیشنهاد داده است.

در [۱۱] روش پیشنهادی شامل دو فاز تخمین PSF نهایی و تخمین تصویر نهفته نهایی است. در فاز اول از دانش پیشین کانال سیاه (حداقل مقدار در تکه‌های تصویر) استفاده می‌کند و در یک پردازش چندمرحله‌ای، PSF به کمک تصویر نهفته میانی چند بار تخمین زده می‌شود و در نهایت PSF نهایی به دست می‌آید. در فاز دوم برای تخمین تصویر نهفته نهایی از کانولوشن تصویر با مجموعه فیلترهای مشتق‌شده بهره می‌گیرد و با توجه به PSF نهایی تخمین زده شده و تصویر مات اولیه به بازیابی تصویر نهفته نهایی می‌پردازد.

روش‌های مات‌زدایی غیر کور به عدم تطابق بین PSF تخمینی و PSF واقعی، بسیار حساس هستند [۱۲]. در چنین شرایطی، مات‌زدایی متداول تصویر مبتنی بر دانش دقیق PSF می‌تواند منجر به اعوجاج قابل توجه تصویر ناشی از عدم تطابق بین PSF تخمین زده شده و PSF واقعی شود. با افزایش عدم قطعیت در مورد PSF، اطمینان جواب کاهش می‌یابد. از این رو در این مقاله، ما مسأله مات‌زدایی تصویر را به عنوان یک مشکل نیمه‌کور در بین سناریوهای کور و غیر کور در نظر می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم. در ادامه و در بخش ۲ فرایند مات‌شدگی تصویر معرفی می‌شود. در بخش ۳، مدل پیشنهادی ارائه شده و در بخش ۴ پیچیدگی محاسباتی مسأله پیشنهادی و در بخش ۵ نتایج آزمایش‌ها با استفاده از این مدل آورده شده است.

در طول این مقاله، نشانه‌ها و مفروضات زیر استفاده می‌شوند: حروف کوچک (مانند a)، بردارها و حروف بزرگ (مانند A)، ماتریس‌ها را نشان می‌دهند. نشانه $(.)^T$، ترانهاده ماتریس و یا بردار را نشان می‌دهد. $\|.\|_F$ و $\|.\|_2$ به ترتیب نُرم فروبنیوس ماتریس و نُرم اقلیدوسی بردار می‌باشد. $Tr[.]$ و $vec(.)$ به ترتیب، اثر[1] و نسخه‌برداری یک ماتریس را بیان می‌کنند. $\mathbb{R}^{M\times N}$ فضای $M\times N$ از ماتریس‌های مقدار حقیقی را تعریف می‌کند و $A\otimes B$ نشان‌دهنده ضرب کرونکر[2] بین دو ماتریس می‌باشد [۱۳].

۲- فرایند مات‌شدگی تصویر

فرایند مات‌شدگی تصویر به خوبی توسط یک فیلتر کانولوشن تغییرناپذیر مکانی تقریب زده می‌شود. PSF به وسیله فیلتر دوبعدی P تعریف می‌شود و بنابراین فرایند مات‌شدگی تصویر اولیه F که منجر به تولید تصویر مات‌شده G می‌شود به صورت زیر بیان می‌شود

$$G = P * F \qquad (۱)$$

ماتریس‌های تصویر G و F با ابعاد $M\times N$ را می‌توان به راحتی به صورت بردارهایی نمایش داد که از قراردادن ستون‌های آنها در امتداد یکدیگر به دست آمده‌اند. بردار تصویر ورودی و خروجی با ابعاد $MN\times 1$، به ترتیب با f و g نمایش داده می‌شوند که $f=vec(F)$ و $g=vec(G)$ هستند و بنابراین نمایش برداری سیستم فوق به صورت زیر می‌باشد

$$g = Hf \qquad (۲)$$

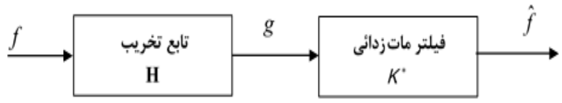
دو عامل در تعیین ساختار و محتوای عددی ماتریس مات‌کننده H با ابعاد $MN\times MN$ تأثیرگذار است: ۱) PSF یا همان تابع گسترش نقطه‌ای که میزان و نوع مات‌شدن هر پیکسل را تعریف می‌کند و ۲) شرایط مرزی (BCs)[3] تصویر که فرضیه‌ها را بر روی داده‌های خارج از مرز تصویر در صحنه واقعی لحاظ می‌کند. در تصویر مات‌شده، مقدار هر پیکسل، جمع وزن‌دار خود پیکسل و پیکسل‌های همسایه است. در عملیات مات‌زدایی تصویر، برای مات‌زدایی پیکسل‌های مرزی و همچنین ساخت ماتریس H، اطلاعات خارج از مرز تصویر لازم می‌باشد اما در واقعیت دسترسی به این اطلاعات غیر ممکن است. بنابراین شرایط مرزی تصویر را با فرضیاتی نزدیک به واقعیت در نظر می‌گیرند تا بتوان ماتریس H را ساخت [۱].

برای هر تصویر می‌توان شرایط مرزی متفاوتی را در نظر گرفت [۱۴]. استفاده از شرایط مرزی متناوب در پردازش تصویر رایج است و ما هم در این تحقیق از شرایط مرزی متناوب استفاده کرده‌ایم. شرایط مرزی متناوب دلالت بر این دارد که خود تصویر مرتباً در تمام جهات تکرار می‌شود، پس هنگامی که تصویر دارای شرایط مرزی متناوب باشد ساختار ماتریس H به صورت BCCB[4] می‌باشد [۱۵].

۳- مات‌زدایی مقاوم با وجود عدم قطعیت در پارامترهای مات‌کننده

یکی از رایج‌ترین حوزه‌ها برای مات‌زدایی، استفاده از مسایل بهینه‌سازی است. با توجه به شکل ۱، در مسایل مات‌زدایی تصویر، هدف، تعیین فیلتر مات‌زدایی K^* با کمترین خطای ممکن برای تصویر مات‌زدایی شده می‌باشد [۱۶]. یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای تعیین K^*، استفاده از مسأله بهینه‌سازی زیر است

1. Trace
2. Kronecker
3. Boundary Conditions
4. Block Circulant with Circulant Blocks



شکل ۱: بلوک دیاگرام مات‌شدگی و مات‌زدایی تصویر.

$$K^* = \arg\min_K (MSE = \left\| f - \hat{f} \right\|_۲^۲ = \left\| f - KHf \right\|_۲^۲) \tag{۳}$$

پیش‌فرض اصلی مسایل بهینه‌سازی «کلاسیک»، توسعه مدل بر اساس داده‌های صریحاً معین و بدون عدم قطعیت (برابر با مقداری اسمی[1]) است. در این گونه از مسایل، اثر عدم قطعیت داده‌ها در کیفیت و «امکان‌پذیر بودن[2]» جواب‌ها اثری ندارد. اما در مسایل دنیای واقعی که اکثر داده‌ها دچار عدم قطعیت هستند، ممکن است با تغییر یکی از داده‌ها تعداد زیادی از محدودیت‌ها نقض شده و جواب به دست آمده غیر بهینه یا حتی غیر ممکن[3] باشد. در نتیجه، لازم است فرایند تولید جواب مسأله در مقابل این عدم قطعیت داده‌ها «مقاوم» باشد. برای این کار به سراغ «بهینه‌سازی مقاوم[4]» می‌روند که به نسبت بهینه‌سازی کلاسیک موضوع متأخری است و در سال‌های اخیر بیشتر به آن پرداخته می‌شود. یکی از روش‌ها در بهینه‌سازی مقاوم، در نظر گرفتن بدترین حالت[5] ممکن برای تابع هدف و بهینه‌سازی بر اساس بدترین حالت ممکن است [۱۲] و [۱۷] تا [۱۹].

در (۴) ماتریس مات‌کننده (H) باید کاملاً معلوم باشد تا این که طراحی فیلتر میسر شود اما اغلب در عمل، بسیار دشوار است که H دقیقاً مشخص باشد. بنابراین باید عدم قطعیت در مورد H نیز در نظر گرفته شود و برای این کار ماتریس مات‌کننده $H \in \mathbb{R}^{MN\times MN}$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰] و [۲۱]

$$H = \hat{H} + \Delta \tag{۴}$$

که $\hat{H}$ مقدار اسمی تابع مات‌کننده و Δ عدم قطعیت در مورد H را بیان می‌کند و در واقع Δ خطای ناشی از نقص اطلاعاتی در مورد H است. Δ، ماتریس تصادفی با میانگین صفر و $\|\Delta\|_F \le \delta$ است که δ کران خطای آن می‌باشد. مثلاً خطا می‌تواند ناشی از تخمین نادرست یا از بین رفتن بخشی از اطلاعات ماتریس H باشد. ایده این تحقیق، استفاده از بهینه‌سازی مقاوم برای مات‌زدایی با توجه به عدم قطعیتی که نسبت به H داریم، است. در بهینه‌سازی مقاوم مسأله طراحی به شکل $\min\max$ تابع هدف بیان می‌شود و بیشینه‌سازی آن نسبت به Δ می‌باشد. بنابراین مسأله بهینه‌سازی پیشنهادی ما به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} K^* &= \arg\min_K \max_\Delta \left\| f - K(\hat{H} + \Delta) f) \right\|_۲^۲ \\ &\text{s.t.}: \|\Delta\|_F \le \delta \end{aligned} \tag{۵}$$

در مسأله بیشنه‌سازی به دنبال «بدترین» ماتریس دلتایی (Δ) هستیم که تابع هدف مسأله بهینه‌سازی با داشتن آن «بیشترین» مقدار ممکن از میان همه مقادیر ممکن (یعنی بیشترین خطای بین تصویر اصلی و تصویر مات‌شده) را داشته باشد. البته برای این ماتریس محدودیتی هم در نظر گرفته شده که به صورت قید به مسأله اضافه شده است. مسأله اصلی در مقاله ما، مسأله مینیمم‌کردن این بدترین (بیشترین) مقدار خطا است. در مسأله مینیمم‌سازی به دنبال فیلتری (K^*) هستیم که وقتی بر تصویر مات‌شده اعمال می‌شود و تصویر مات‌زدایی شده را تحویل می‌دهد کمترین خطا را بدون هیچ قید و شرطی داشته باشد. برای یافتن این فیلتر به حل مسأله پیشنهادی می‌پردازیم و فرم بسته‌ای برای مسأله بهینه‌سازی پیشنهادی ارائه می‌دهیم. برای حل مسأله بهینه‌سازی پیشنهادشده (۵)، ابتدا تابع هدف را به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} MSE &= (KHf - f)^T (KHf - f) \\ &= (f^T H^T K^T - f^T)(KHf - f) \end{aligned} \tag{۶}$$

با توجه به این که حاصل عبارت فوق اسکالر است و برای هر مقدار اسکالر، اثر آن با خودش برابر است خواهیم داشت

$$\begin{aligned} MSE &= Tr[f^T H^T K^T KHf] - Tr[f^T H^T K^T f] \\ &- Tr[f^T KHf] + Tr[f^T f] \\ &= Tr[ff^T (\hat{H}^T + \Delta^T) K^T K (\hat{H} + \Delta)] \\ &- Tr[ff^T (\hat{H}^T + \Delta^T) K^T] \\ &- Tr[ff^T K(\hat{H} + \Delta)] + Tr[ff^T] \\ &= Tr[ff^T (\hat{H}^T K^T K\hat{H} + \Delta^T K^T K\hat{H} + \hat{H}^T K^T K\Delta \\ &+ \Delta^T K^T K\Delta)] - Tr[ff^T (\hat{H}^T K^T + \Delta^T K^T)] \\ &- Tr[ff^T (K\hat{H} + K\Delta)] + Tr[ff^T] \\ &= Tr[ff^T (\hat{H}^T K^T K\hat{H} - \hat{H}^T K^T - K\hat{H} + I \\ &+ \Delta^T K^T K\hat{H} + \hat{H}^T K^T K\Delta \\ &+ \Delta^T K^T K\Delta - \Delta^T K^T - K\Delta)] \end{aligned} \tag{۷}$$

برای حل این مسأله یک فرایند دومرحله‌ای پیشنهاد می‌شود:

مرحله اول: ابتدا باید بیشینه‌سازی نسبت به Δ انجام شود و برای این منظور در بسط فوق، تغییر متغیر اعمال می‌کنیم. در نتیجه تابع هدف برابر است با

$$\begin{aligned} &= Tr[\overbrace{ff^T}^{X} (\overbrace{\hat{H}^T K^T K\hat{H} - \hat{H}^T K^T - K\hat{H} + I}^{Y} + \\ &\overbrace{\Delta^T K^T K\hat{H} + \hat{H}^T K^T K\Delta + \Delta^T K^T K\Delta - \Delta^T K^T - K\Delta}^{\Lambda})] \\ &= Tr\left[X(Y + \Lambda)\right] \end{aligned} \tag{۸}$$

بنابراین مسأله بیشینه‌سازی به صورت زیر تغییر پیدا می‌کند

$$\Lambda_{\max} = \arg\max_\Lambda tr[X(Y + \Lambda)] \ , \ \text{s.t.}: \|\Lambda\|_F \le \varepsilon \tag{۹}$$

با توجه به لم ۱ در پیوست، مقدار بیشینه پارامتر Λ برابر است با

$$\Lambda_{\max} = \varepsilon \frac{X}{\|X\|_F} = \varepsilon \frac{ff^T}{\left\|ff^T\right\|_F} \tag{۱۰}$$

با توجه به نامساوی مثلث، مقدار پارامتر ε در (۱۰) برابر است با

$$\begin{aligned} &\|\Lambda\|_F \le \\ &\left\|\Delta^T K^T K\hat{H} + \hat{H}^T K^T K\Delta + \Delta^T K^T K\Delta - \Delta^T K^T - K\Delta\right\|_F \\ &\le \left\|\Delta^T K^T K\Delta\right\|_F + \left\|\Delta^T K^T K\hat{H}\right\|_F + \left\|\hat{H}^T K^T K\Delta\right\|_F \\ &+ \left\|-\Delta^T K^T\right\|_F + \left\|-K\Delta\right\|_F \le \left\|\Delta^T\right\|_F \times \left\|K^T\right\|_F \times \|K\|_F \\ &\times \|\Delta\|_F + ۲\|\Delta\|_F \times \left\|\hat{H}\right\|_F \times \left\|K^T\right\|_F \times \|K\|_F + ۲\|\Delta\|_F \\ &\times \|K\|_F \le \varepsilon = (\delta^۲ + ۲h\delta)\|K\|_F^۲ + ۲\delta\|K\|_F \end{aligned} \tag{۱۱}$$

1. Nominal Value
2. Feasible
3. Infeasible
4. Robust Optimization
5. Worst Case

مرحله دوم: در این مرحله به دنبال حل مسأله کمینه‌سازی و یافتن فیلتر مات‌زدایی با وجود کمترین خطا در جواب هستیم. با جایگذاری مقدار Λ_{max} در تابع هدف مسأله (۶) داریم

$$\begin{aligned} K^* &= \arg\min_K Tr[X(Y+\Lambda_{max})] \\ &= Tr[X(Y+\varepsilon\frac{X}{\|X\|_F})] = Tr[XY]+\varepsilon\|X\|_F \\ &= \arg\min_K Tr[X(\hat{H}^T K^T K\hat{H} - \hat{H}^T K^T - K\hat{H} + I)] \\ &+ ((\delta^2+2h\delta)\|K\|_F^2 + 2\delta\|K\|_F)\|X\|_F \end{aligned} \tag{۱۲}$$

تابع هدف در مسأله بهینه‌سازی فوق برابر با عبارت زیر است

$$\begin{aligned} obj &= Tr[X(\hat{H}^T K^T K\hat{H} - \hat{H}^T K^T - K\hat{H} + I)] \\ &+ ((\delta^2+2h\delta)\|K\|_F^2 + 2\delta\|K\|_F)\|X\|_F \end{aligned} \tag{۱۳}$$

تابع هدف، محدب است و بنابراین برای یافتن جواب مسأله از obj نسبت به ماتریس K مشتق گرفته می‌شود [۲۲]

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}obj}{\mathrm{d}K} &= K(\hat{H}F\hat{H}^T)^T + K(\hat{H}F\hat{H}^T) - X\hat{H}^T - X\hat{H}^T \\ &+ 2K(\delta^2+2h\delta)\|X\|_F + 2\delta\|X\|_F\frac{K}{\|K\|_F} \end{aligned} \tag{۱۴}$$

سپس باید ریشه معادله مشتق را به دست آوریم. معادله (۱۴)، معادله غیر خطی بر حسب ماتریس K می‌باشد. برای حل، معادله ماتریسی را به معادله برداری تبدیل می‌کنیم و بنابراین معادله غیر خطی مشتق بر حسب بردار $vec(K)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}obj}{\mathrm{d}K} &= ((\hat{H}X\hat{H}^T)^T \otimes I)vec(K) + \delta\|X\|_F\frac{vec(K)}{\|vec(K)\|} \\ &+ (\delta^2+2h\delta)\|X\|_F\, vec(K) - vec(X\hat{H}^T) = 0 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

تا کنون الگوریتم‌های زیادی برای حل معادله غیر خطی برداری ارائه شده است. به طور مثال می‌توان از روش‌های مثل bryoden [۲۳] و NG[1] [۲۴] برای حل معادله غیر خطی برداری (۱۴) استفاده کرد. پس از حاصل‌شدن فیلتر مات‌زدایی، می‌توان فیلتر را بر تصویر مات‌شده اعمال کرد و سپس تصویر جواب یعنی تصویر مات‌زدایی شده را با توجه به رابطه زیر به دست آورد

$$\hat{f} = K^* g \tag{۱۶}$$

۴- پیچیدگی محاسباتی مسئله پیشنهادی

نظریه پیچیدگی محاسباتی[2] شاخه‌ای از نظریه محاسبات، علوم نظری رایانه و ریاضی است که به بررسی دشواری حل مسایل به وسیله رایانه می‌پردازد. این نظریه بخشی از نظریه محاسباتی است که با منابع مورد نیاز برای حل یک مسئله سروکار دارد. عمومی‌ترین منابع، زمان (مقدار زمان مورد نیاز برای حل مسأله) و فضا (مقدار حافظه مورد نیاز) می‌باشند. از سایر منابع می‌تواند به تعداد پردازنده‌های موازی (در حالت پردازش موازی) اشاره کرد اما در اینجا عوامل بالا مورد بحث نیستند. باید به این نکته توجه داشت که نظریه پیچیدگی با نظریه قابل حل‌بودن متفاوت است. این نظریه در مورد قابل حل‌بودن یک مسأله بدون توجه به منابع مورد نیاز آن، بحث می‌کند. مواردی هست که می‌دانیم یک مسئله جواب دارد ولی راه حل و روش حل آن هنوز ارائه نگردیده و گاهی علاوه بر مشکل مذکور حتی با در دست داشتن راه حل، منابع و ابزار لازم جهت پیاده‌سازی آن مسئله را نداریم. بعد از این نظریه که بیان می‌کند کدام مسایل قابل حل و کدام مسایل غیر قابل حل هستند، این سؤال به نظر طبیعی می‌رسد که درجه سختی مسئله چقدر است. نظریه پیچیدگی محاسبات در این زمینه است [۲۵].

برای بررسی پیچیدگی محاسباتی مسأله پیشنهادی، پیچیدگی محاسباتی (۱۲) محاسبه می‌شود. ابتدا لازم است پیچیدگی محاسباتی یک مسأله استاندارد SDP بیان شود. یک مسأله استاندارد SDP به صورت زیر است

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \\ &\text{s.t.}: A_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j A_j \geq 0 \ , \ \|x\|_2 \leq R \end{aligned} \tag{۱۷}$$

پیچیدگی محاسباتی مسأله فوق برابر است با

$$C(1+\sum_{i=1}^{m} a_i)^{\frac{1}{2}} n(n^2 + n\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i^3) \tag{۱۸}$$

که در این رابطه C مقدار ثابتی است که به سایز مسأله وابسته می‌باشد و A_i ماتریس متقارن با m بلوک با سایز $a_i \times a_i$ است [۲۵]. برای محاسبه پیچیدگی مسأله پیشنهادی، (۱۲) را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\begin{aligned} K^* &= \arg\min_K Tr[X(\hat{H}^T K^T K\hat{H} - \hat{H}^T K^T - K\hat{H} + I)] \\ &+ ((\delta^2+2h\delta)\|K\|_F^2 + 2\delta\|K\|_F)\|X\|_F \\ &\approx \arg\min_K Tr[\hat{H}X\hat{H}^T K^T K + X] \\ &+ (\delta^2+2h\delta)\|X\|_F\, Tr[K^T K] \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با تغییر متغیر $\kappa = K^T K$ در مسأله فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &\min_{\kappa} Tr[\hat{H}X\hat{H}^T\kappa + X] + (\delta^2+2h\delta)\|X\|_F\, Tr[\kappa] \\ &\min_{\kappa} Tr[A\kappa] + Tr[X] + c_0 Tr[\kappa] \\ &\min_{\kappa} vec(A)^T vec(\kappa) + c_0 vec(I)^T vec(\kappa) + Tr[X] \\ &\min_{\kappa} [vec(A)^T + c_0 vec(I)^T] vec(\kappa) + Tr[X] \end{aligned} \tag{۲۰}$$

فرم اپیگراف مسأله بهینه‌سازی در رابطه فوق به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} &\min_{vec(\kappa),\tau} \tau \\ &\text{s.t.}: [vec(A)^T + c_0 vec(I)^T]vec(\kappa) + Tr[X] \leq \tau \end{aligned} \tag{۲۱}$$

که با در نظر گرفتن $\tau = c^T x$ که $c^T = [0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1\times((MN)^2+1)}$ و $x = \begin{bmatrix} vec(\kappa) \\ \tau \end{bmatrix}$ است و $-A' = vec(A)^T + c_0 vec(I)^T$ و $A_0 = -Tr[X]$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \\ &\text{s.t.}: A' vec(\kappa) + A_0 + \tau \geq 0 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

فرم مسأله فوق مانند یک مسأله SDP می‌باشد و بنابراین پیچیدگی محاسباتی مسأله فوق با توجه به (۱۷) و در نظر گرفتن $m=(MN)^2$، $n=(MN)^2$ و $a_i = 1$، برابر است با

1. Newton_GMRSE Method
2. Computational Complexity Theory

(الف) (ب)

شکل ۲: تصویر اصلی (الف) Parrot و (ب) Peppers.

$$Complexity \propto C(1+(MN)^2)^{\frac{1}{2}}(MN)^2$$
$$\times((MN)^4+(MN)^2\times(MN)^2\times 1+(MN)^2\times 1)$$
$$=C(1+M^2N^2)^{\frac{1}{2}}M^2N^2 \qquad (23)$$
$$\times(M^4N^4+M^4N^4+M^2N^2)$$
$$\approx 2CMN\times M^2N^2(M^4N^4)\approx C'M^7N^7$$

۵- شبیه‌سازی و نتایج

برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، این روش بر روی تصاویر مشخص‌شده در شکل ۲ آزمایش شد و عملکرد آن مورد بررسی قرار گرفت. تصاویر مذکور توسط مجموع ماتریس مات‌کننده گوسی $(\hat{H})$ و ماتریس خطا (Δ)، مات می‌شوند و سپس به عنوان ورودی الگوریتم بازسازی در نظر گرفته می‌شوند. برای ساخت ماتریس‌های $\hat{H}$، از PSF گوسی با واریانس‌های مختلف $(\text{fspecial}('\text{gaussian}',[5,5],\sigma_b))$ و برای ساخت Δ از ماتریس تصادفی گوسی با واریانس‌های مختلف استفاده کرده‌ایم. با توجه به این که در تمامی حالات، شرایط مرزی متناوب انتخاب شده است، ساختار ماتریس مات‌کنندگی به صورت BCCB می‌باشد. اندازه تصاویر مورد آزمایش، ۳۰×۳۰ می‌باشد. تمامی آزمایش‌ها با نرم‌افزار Matlab۲۰۱۸a بر روی سیستمی با مشخصات Intel Core i۷ CPU ۳٫۶ GHz و حافظه ۳۲ GB RAM انجام شده است. برای طراحی فیلتر مات‌زدایی تصویر با (۱۶)، به علت وجود ضرب کرونکر، به سیستمی با حجم حافظه بالاتر نیازمند هستیم. بنابراین برای حل مسأله بهینه‌سازی (۱۲) به سراغ ابزار مدل‌سازی CVX می‌رویم [۲۶]. CVX ابزاری است که به نرم‌افزار Matlab اضافه می‌شود و برای حل عددی مسأله بهینه‌سازی محدب کاربرد دارد.

ابزار CVX، حل‌کننده[1]های متفاوتی دارد که ما از حل‌کننده sedumi به دلیل سرعت اجرای بالای آن استفاده می‌کنیم [۲۲]. فیلتر مات‌زدایی تصویر با توجه به عدم قطعیتی که در مورد پارامتر مات‌شدگی وجود دارد، طراحی و سپس برای مات‌زدایی بر تصویر مات‌شده اعمال می‌شود.

۵-۱ معیارهای ارزیابی

برای ارزیابی نتایج حاصل‌شده، از سه معیار PSNR، SSIM و MS_SSIM استفاده می‌شود. معیار PSNR نشان‌دهنده نسبت خطا به سیگنال ماکسیمم است و توسط فرمول زیر محاسبه می‌شود [۲۷]

$$PSNR(f,\hat{f})$$
$$=10\log_{10}\frac{MN\times(\max_{ij}(f(i,j)-\hat{f}(i,j)))^2}{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(f(i,j)-\hat{f}(i,j))^2} \qquad (24)$$

1. Solver

همان طور که در رابطه بالا مشخص است، خروجی این معیار بر حسب دسی‌بل (dB) بیان می‌شود.

معیار SSIM برای مقایسه تشابه دو تصویر می‌باشد و این معیار به سیستم بینایی انسان بسیار نزدیک است. در SSIM میزان شباهت برای نور، کنتراست[2] و ساختار[3] محاسبه می‌شود. اول نور هر سیگنال مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در مرحله دوم میانگین سطح خاکستری از سیگنال کم می‌شود. در مرحله سوم سیگنال‌ها به وسیله انحراف معیارشان نرمال‌سازی می‌شوند و نهایتاً این سه جزء برای اندازه‌گیری میزان شباهت با یکدیگر ترکیب می‌شوند. نکته قابل توجه این است که این سه جزء نسبتاً مستقل هستند. به عنوان مثال تغییر نور یا کنتراست بر روی ساختار تأثیری ندارد. معیار SSIM از رابطه زیر به دست می‌آید [۲۷]

$$SSIM(f,\hat{f})=\frac{(2\mu_f\mu_{\hat{f}}+c_1)(2\sigma_{f\hat{f}}+c_2)}{(\mu_f^2+\mu_{\hat{f}}^2+c_1)(\sigma_f^2+\sigma_{\hat{f}}^2+c_2)} \qquad (25)$$

در این رابطه μ_f و $\mu_{\hat{f}}$ به ترتیب بیانگر میانگین تصویر f و $\hat{f}$، σ_f^2 و $\sigma_{\hat{f}}^2$ واریانس تصاویر و $\sigma_{f\hat{f}}$ کوواریانس دو تصویر است. متغییرهای c_1 و c_2 برای پایداری رابطه در نظر گرفته شده‌اند که رابطه آنها در [۲۷] آمده است.

شکل پیشرفته‌تر SSIM با نام MS-SSIM[4] است. این شاخص در چندین مقیاس از نسخه‌های مختلف تصویر، SSIM را محاسبه می‌کند. با توجه به تغییرات در شرایط مشاهده، این شاخص می‌تواند قوی‌تر باشد [۲۸].

برای بررسی بهره[5] روش پیشنهادی، لازم است مقادیر اولیه دو معیار ارزیابی نیز محاسبه شود. مقادیر اولیه معیارهای ارزیابی بین تصویر اصلی (f) و تصویر مات‌شده (g) محاسبه می‌شود. این مقادیر با $PSNR0$ و $SSIM0$ نشان داده می‌شوند. بهره معیار PSNR، برابر با $Gain\_P=PSNR-PSNR0$ و بهره معیار SSIM، برابر با $Gain\_S=SSIM/SSIM0$ است.

۵-۲ نتایج شبیه‌سازی

نتایج عددی روش پیشنهادی برای دو تصویر مورد آزمایش، در جدول‌های ۱تا ۳ آمده است.

فیلتر مات‌زدایی نیمه‌کور، ایده‌ای جدید در مات‌زدایی می‌باشد. نتایج حاصل‌شده نشان می‌دهند که بهبود معیارهای ارزیابی با استفاده از روش پیشنهادی قابل توجه است. همان طور که در جداول ۱ تا ۳ مشخص است، هنگامی که مقدار $\delta=0$ است، یعنی PSF به صورت قطعی مشخص باشد، مقدار PSNR، SSIM و MS_SSIM بالا می‌باشند. هنگامی که با دید واقع‌گرایانه مسأله مات‌زدایی مورد بررسی قرار می‌گیرد و عدم قطعیت در مورد PSF لحاظ می‌شود $(\delta\neq 0)$، فیلتر مات‌زدایی نیمه‌کور ما می‌تواند به خوبی عمل کند و تصویر جواب قابل قبولی را ارائه بدهد. همچنین با افزایش اثر δ، مقدار سه پارامتر ارزیابی کمی کاهش می‌یابد که البته این امر طبیعی می‌باشد. فیلتر مات‌زدایی نیمه‌کور طراحی‌شده، توانسته اثر حدوداً ۵۰ درصدی خطای عدم قطعیت در مقایسه با فیلتر معلوم $\hat{H}$ را خنثی کند و به خوبی مات‌زدایی را انجام بدهد. روش پیشنهادی با دو روش مات‌زدایی کور [۲۹] و [۸] مقایسه شده است. در

2. Contrast
3. Structure
4. Multiscale SSIM
5. Gain

جدول ۱: نتایج عددی در $\sigma_b = 2$ و $\|\hat{H}\|_F = 6.24$.

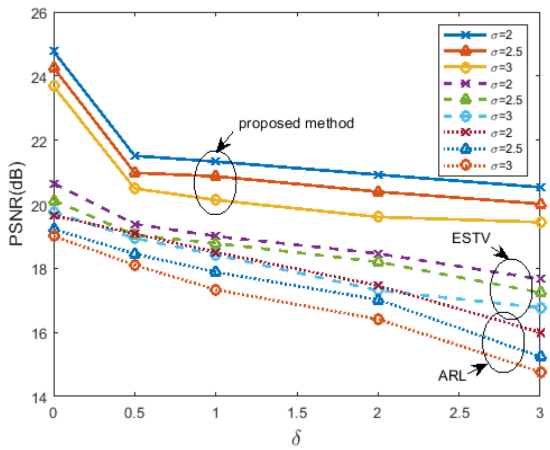
		Proposed method							ARL algorithm [۲۹]			ESTV algorithm [۸]		
	δ	PSNR۰	PSNR	Gain_P	SSIM۰	SSIM	Gain_S	MS_SSIM	PSNR	SSIM	MS_SSIM	PSNR	SSIM	MS_SSIM
parrot	۰	۱۹٫۰۲	۳۰٫۹۸	۱۱٫۹۶	۰٫۶۴۷	۰٫۹۵۹	۱٫۴۸۲	۰٫۹۸۹	۲۲٫۰۱	۰٫۷۷۰	۰٫۸۵۸	۲۲٫۸۸	۰٫۷۷۹	۰٫۹۵۳
	۰٫۵	۱۹٫۰۱	۲۶٫۵۷	۷٫۵۶	۰٫۶۴۵	۰٫۹۳۷	۱٫۴۵۲	۰٫۹۸۲	۲۱٫۴۱	۰٫۷۵۳	۰٫۸۶۰	۲۱٫۶۷	۰٫۷۶۰	۰٫۹۴۸
	۱	۱۸٫۹۲	۲۶٫۰۴	۷٫۱۲	۰٫۶۳۸	۰٫۹۱۹	۱٫۴۴۰	۰٫۹۸۰	۲۱٫۰۵	۰٫۷۴۰	۰٫۸۲۷	۲۱٫۱۵	۰٫۷۵۲	۰٫۹۳۹
	۲	۱۸٫۸۶	۲۵٫۳۹	۶٫۵۳	۰٫۶۳۱	۰٫۸۶۸	۱٫۴۳۷	۰٫۹۷۸	۱۹٫۲۹	۰٫۷۲۷	۰٫۸۰۸	۲۰٫۲۹	۰٫۷۴۸	۰٫۹۲۴
	۳	۱۸٫۶۷	۲۵٫۰۶	۶٫۳۹	۰٫۶۲۵	۰٫۸۴۸	۱٫۴۳۲	۰٫۹۷۵	۱۴٫۷۵	۰٫۶۱۸	۰٫۷۴۰	۱۹٫۴۷	۰٫۷۳۸	۰٫۹۱۱
peppers	۰	۱۸٫۱۳	۲۴٫۷۷	۶٫۶۴	۰٫۵۱۵	۰٫۹۳۶	۱٫۸۶۲	۰٫۹۶۰	۱۹٫۶۵	۰٫۵۹۱	۰٫۷۹۷	۲۰٫۶۵	۰٫۶۴۷	۰٫۹۲۶
	۰٫۵	۱۸٫۱۲	۲۱٫۵۱	۳٫۳۹	۰٫۵۱۲	۰٫۹۴۶	۱٫۸۴۷	۰٫۹۵۳	۱۹٫۰۸	۰٫۵۸۴	۰٫۷۲۷	۱۹٫۳۸	۰٫۶۲۰	۰٫۹۱۲
	۱	۱۸٫۱۱	۲۱٫۳۳	۳٫۲۲	۰٫۵۰۹	۰٫۹۳۲	۱٫۸۳۱	۰٫۹۴۹	۱۸٫۵۰	۰٫۵۶۰	۰٫۷۱۳	۱۹	۰٫۶۱۰	۰٫۹۰۰
	۲	۱۷٫۹۵	۲۰٫۹۲	۲٫۹۷	۰٫۵۰۴	۰٫۹۲۱	۱٫۸۲۷	۰٫۹۴۶	۱۷٫۴۶	۰٫۴۹۹	۰٫۶۸۳	۱۸٫۴۶	۰٫۶۰۳	۰٫۸۸۳
	۳	۱۷٫۴۸	۲۰٫۵۳	۳٫۰۵	۰٫۴۹۸	۰٫۹۰۹	۱٫۸۲۵	۰٫۹۴۱	۱۶	۰٫۴۵۳	۰٫۶۶۳	۱۸٫۰۳	۰٫۵۹۴	۰٫۸۵۳

جدول ۲: نتایج عددی در $\sigma_b = 2.5$ و $\|\hat{H}\|_F = 6.10$.

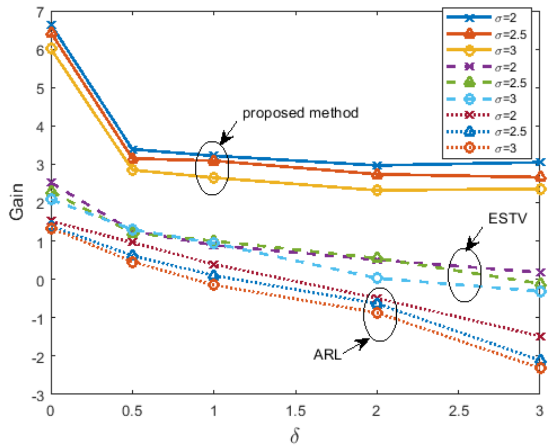
		Proposed method							ARL algorithm [۲۹]			ESTV algorithm [۸]		
	δ	PSNR۰	PSNR	Gain_P	SSIM۰	SSIM	Gain_S	MS_SSIM	PSNR	SSIM	MS_SSIM	PSNR	SSIM	MS_SSIM
parrot	۰	۱۸٫۷۴	۳۰٫۵۲	۱۱٫۷۸	۰٫۶۲۳	۰٫۹۲۳	۱٫۴۸۱	۰٫۹۷۰	۲۱٫۱۷	۰٫۷۰۱	۰٫۸۱۹	۲۲٫۵۰	۰٫۷۱۲	۰٫۹۴۳
	۰٫۵	۱۸٫۷۴	۲۵٫۵۶	۶٫۸۲	۰٫۶۲۰	۰٫۸۹۸	۱٫۴۴۸	۰٫۹۶۰	۲۰٫۵۰	۰٫۶۷۹	۰٫۸۰۲	۲۱٫۲۲	۰٫۶۸۹	۰٫۹۳۰
	۱	۱۸٫۶۹	۲۵٫۲۷	۶٫۵۸	۰٫۶۱۸	۰٫۸۸۹	۱٫۴۳۸	۰٫۹۴۸	۱۹٫۷۷	۰٫۶۵۵	۰٫۷۵۸	۲۰٫۷۷	۰٫۶۷۳	۰٫۹۱۹
	۲	۱۸٫۶۳	۲۴٫۶۷	۶٫۰۴	۰٫۶۱۱	۰٫۸۷۶	۱٫۴۳۳	۰٫۹۳۵	۱۸٫۰۷	۰٫۶۱۲	۰٫۷۲۰	۱۹٫۵۷	۰٫۶۵۲	۰٫۸۹۳
	۳	۱۸٫۵۷	۲۴٫۵۸	۶٫۰۱	۰٫۶۰۴	۰٫۸۶۴	۱٫۴۳۰	۰٫۹۱۷	۱۳٫۱۱	۰٫۶۰۰	۰٫۶۷۸	۱۸٫۶۳	۰٫۶۴۰	۰٫۸۸۲
peppers	۰	۱۷٫۸۳	۲۴٫۲۶	۶٫۴۳	۰٫۴۸۱	۰٫۸۹۴	۱٫۸۵۸	۰٫۹۵۲	۱۹٫۲۲	۰٫۵۷۷	۰٫۷۷۱	۲۰٫۱۲	۰٫۵۹۷	۰٫۹۰۸
	۰٫۵	۱۷٫۸۳	۲۰٫۹۸	۳٫۱۵	۰٫۴۷۸	۰٫۸۸۳	۱٫۸۴۷	۰٫۹۳۸	۱۸٫۴۵	۰٫۵۵۵	۰٫۷۴۹	۱۹٫۰۴	۰٫۵۷۴	۰٫۸۸۹
	۱	۱۷٫۷۸	۲۰٫۸۷	۳٫۰۹	۰٫۴۷۳	۰٫۸۶۵	۱٫۸۲۸	۰٫۹۲۰	۱۷٫۸۸	۰٫۴۸۱	۰٫۷۰۴	۱۸٫۷۸	۰٫۵۵۱	۰٫۸۷۷
	۲	۱۷٫۶۵	۲۰٫۳۹	۲٫۷۴	۰٫۴۷۱	۰٫۸۶۰	۱٫۸۲۵	۰٫۹۰۳	۱۷٫۰۲	۰٫۴۴۳	۰٫۶۶۶	۱۸٫۲۰	۰٫۵۳۷	۰٫۸۵۹
	۳	۱۷٫۳۵	۲۰٫۰۱	۲٫۶۶	۰٫۴۶۸	۰٫۸۵۳	۱٫۸۲۲	۰٫۸۸۵	۱۵٫۲۴	۰٫۴۰۷	۰٫۶۲۷	۱۷٫۲۴	۰٫۴۹۷	۰٫۸۳۳

جدول ۳: نتایج عددی در $\sigma_b = 3$ و $\|\hat{H}\|_F = 6.05$.

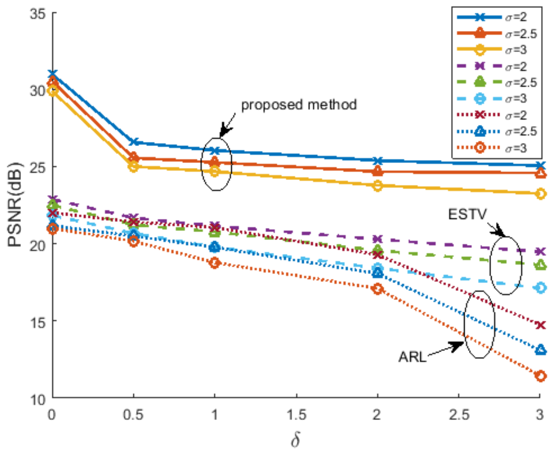
		Proposed method							ARL algorithm [۲۹]			ESTV algorithm [۸]		
	δ	PSNR۰	PSNR	Gain_P	SSIM۰	SSIM	Gain_S	MS_SSIM	PSNR	SSIM	MS_SSIM	PSNR	SSIM	MS_SSIM
parrot	۰	۱۸٫۵۹	۲۹٫۸۸	۱۱٫۲۹	۰٫۶۱۰	۰٫۹۰۳	۱٫۴۸۰	۰٫۹۵۷	۲۰٫۹۹	۰٫۶۵۷	۰٫۸۰۰	۲۱٫۸۴	۰٫۶۷۹	۰٫۹۲۲
	۰٫۵	۱۸٫۵۹	۲۵	۶٫۴۱	۰٫۶۰۸	۰٫۸۸۳	۱٫۴۵۲	۰٫۹۴۲	۲۰٫۱۷	۰٫۶۴۳	۰٫۷۷۶	۲۰٫۶۷	۰٫۶۶۰	۰٫۹۰۸
	۱	۱۸٫۴۴	۲۴٫۶۸	۶٫۲۴	۰٫۶۰۷	۰٫۸۷۱	۱٫۴۳۴	۰٫۹۳۰	۱۸٫۷۸	۰٫۶۲۱	۰٫۷۳۴	۱۹٫۷۸	۰٫۶۴۱	۰٫۸۹۳
	۲	۱۸٫۰۱	۲۳٫۷۸	۶٫۷۷	۰٫۶۰۰	۰٫۸۵۹	۱٫۴۳۱	۰٫۹۱۸	۱۷٫۱۰	۰٫۵۸۵	۰٫۷۰۶	۱۸٫۴۲	۰٫۶۲۷	۰٫۸۸۱
	۳	۱۷٫۵۰	۲۳٫۲۵	۵٫۷۵	۰٫۵۹۵	۰٫۸۵۰	۱٫۴۲۸	۰٫۸۹۷	۱۱٫۴۶	۰٫۵۶۹	۰٫۶۷۳	۱۷٫۱۲	۰٫۶۰۸	۰٫۸۷۲
peppers	۰	۱۷٫۶۷	۲۳٫۶۸	۶٫۰۱	۰٫۴۶۳	۰٫۸۶۱	۱٫۸۵۹	۰٫۹۳۴	۱۹٫۰۱	۰٫۴۸۴	۰٫۷۵۲	۱۹٫۷۵	۰٫۴۹۶	۰٫۸۹۷
	۰٫۵	۱۷٫۶۴	۲۰٫۴۹	۲٫۸۵	۰٫۴۶۱	۰٫۸۵۱	۱٫۸۴۵	۰٫۹۲۰	۱۸٫۱۰	۰٫۴۶۳	۰٫۷۲۰	۱۸٫۹۴	۰٫۴۷۲	۰٫۸۶۰
	۱	۱۷٫۴۸	۲۰٫۱۳	۲٫۴۶	۰٫۴۶۱	۰٫۸۴۱	۱٫۸۲۴	۰٫۹۰۹	۱۷٫۳۳	۰٫۴۵۰	۰٫۶۸۵	۱۸٫۴۲	۰٫۴۶۶	۰٫۸۴۸
	۲	۱۷٫۲۸	۱۹٫۶۰	۲٫۳۲	۰٫۴۵۷	۰٫۸۳۳	۱٫۸۲۲	۰٫۸۸۸	۱۶٫۴۱	۰٫۴۱۷	۰٫۶۲۹	۱۷٫۳۱	۰٫۴۵۷	۰٫۸۱۴
	۳	۱۷٫۰۸	۱۹٫۴۴	۲٫۳۶	۰٫۴۵۴	۰٫۸۲۶	۱٫۸۱۹	۰٫۸۷۳	۱۴٫۷۷	۰٫۴۰۰	۰٫۵۹۷	۱۶٫۷۷	۰٫۴۴۱	۰٫۷۹۴



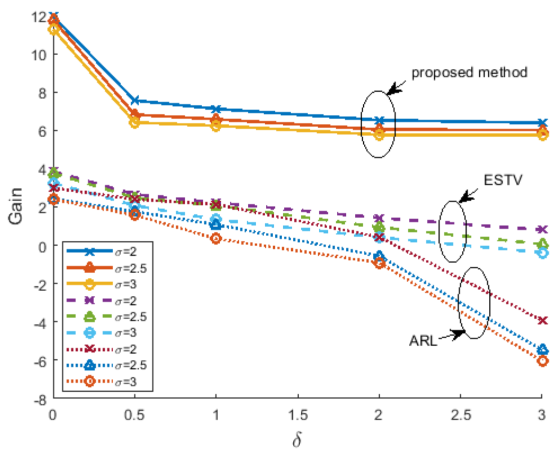
شکل ۳: نمودار PSNR بر حسب δ برای σ_b های مختلف برای تصویر Peppers.



شکل ۵: نمودار بهره PSNR بر حسب δ برای σ_b های مختلف برای تصویر Peppers.



شکل ۴: نمودار PSNR بر حسب δ برای σ_b های مختلف برای تصویر Parrot.

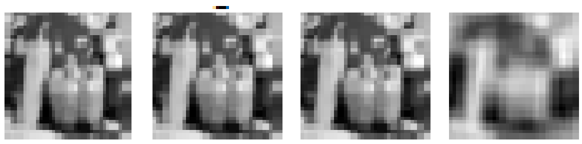


شکل ۶: نمودار بهره PSNR بر حسب δ برای σ_b های مختلف برای تصویر Parrot.

[۸] الگوریتم تکرارشونده پیشنهاد شده که ابتدا PSF تخمین زده می‌شود و سپس از مجموعه اپیگراف تابع TV (ESTV) برای تخمین تصویر استفاده می‌کند. در [۲۹] الگوریتم بهبودیافته ریچاردسون- لوسی (ARL) ارائه شده و البته با تغییراتی روند همگرایی الگوریتم را سریع‌تر کرده است. در هر دو روش مقایسه، ابتدا تصویر به صورت ذکرشده در بخش قبل، مات می‌شود و سپس ماتزدایی انجام می‌گردد.

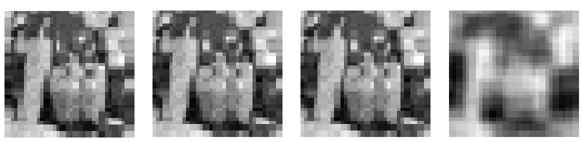
آزمایش علاوه بر مقدارهای مختلف δ، برای σ_b های مختلف نیز انجام شده و معیارهای ارزیابی نشان می‌دهند که در σ_b های بالاتر، روش پیشنهادی موفق بوده است اما روش ماتزدایی [۲۹] در $\sigma_b \geq ۲$ و [۸] در $\sigma_b = ۳$ ناموفق می‌باشد. نمودار PSNR در تمامی حالت‌های بررسی‌شده برای تصویر Peppers و Parrot به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ آمده است.

نتایج حاصل‌شده در جدول ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که بهبود معیارهای ارزیابی نسبت به مقدار اولیه، با استفاده از روش پیشنهادی نیز قابل توجه است. همان طور که مشخص است زمانی که مقدار $\delta = ۰$ است، یعنی PSF به صورت قطعی مشخص باشد، بهره PSNR برای تصویر Parrot، بیش از ۱۱ دسی‌بل و برای تصویر Peppers، بیش از ۶ دسی‌بل نسبت به مقدار اولیه بهبود یافته است. در این حالت بهره SSIM هم به خوبی بهبود عملکرد فیلتر ماتزدایی را نشان می‌دهد. هنگامی که عدم قطعیت در مورد PSF لحاظ می‌شود ($\delta \neq ۰$)، واضح است که بهبود هر سه معیار ارزیابی کاهش می‌یابد اما با این حال روش پیشنهادی توانسته در بدترین حالت تخریب مورد آزمایش، نسبت به روش‌های [۸] و [۲۹] به خوبی ماتزدایی را انجام بدهد و بهره PSNR و بهره SSIM قابل قبولی را به



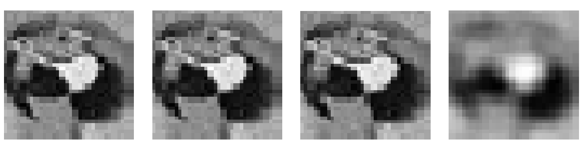
(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۷: تصویر فلفل با $\delta = ۰/۱$ و $\sigma_b = ۲/۵$.



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۸: تصویر فلفل با $\delta = ۳$ و $\sigma_b = ۲/۵$.



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۹: تصویر طوطی با $\delta = ۳$ و $\sigma_b = ۳$.

دست آورد. نمودار بهره PSNR در تمامی حالت‌های مورد بررسی برای تصویر Peppers و Parrot به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است.

در شکل‌های ۷ تا ۹ نتایج بصری روش پیشنهادی ارائه شده است. تصویر الف، تصویر مات‌شده، تصویر ب، تصویر ماتزدایی شده با روش ESTV [۸]، تصویر ج، تصویر ماتزدایی شده با روش ARL [۲۹] و تصویر د، تصویر ماتزدایی شده با روش پیشنهادی می‌باشد.

سایز تصاویر مورد آزمایش کوچک (۳۰×۳۰) است که موجب شده جزئیات تصاویر به طور کامل مشخص نباشد. به دلیل اعمال ریاضی موجود در روش ما، حافظه زیادی لازم است و به همین دلیل نمی‌توان آن را بر روی تصاویر بزرگ‌تر به کار برد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما مات‌زدایی نیمه‌کور را پیشنهاد داده‌ایم. هدف از مات‌زدایی نیمه‌کور، در نظر گرفتن خطای ماتریس مات‌کننده تصویر در دنیای واقعی می‌باشد. با وجود این عدم قطعیت در مورد ماتریس مات‌کننده، طراحی فیلتر مات‌زدایی نیمه‌کور تصویر به وسیله بهینه‌سازی مقاوم انجام شد. بهینه‌سازی مقاوم بر اساس بدترین حالت ممکن در مورد عدم قطعیتی که وجود دارد توانست جواب قابل قبولی به دست آورد. روش پیشنهادی توانست بیش از ۶ دسی‌بل بهبود بهره PSNR و بیش از ۴ دسی‌بل بهبود PSNR نسبت به روش‌های مات‌زدایی کور را فراهم آورد. در نتیجه، روش پیشنهادی منجر به کاهش حساسیت جواب نسبت به دقت تخمین PSF می‌شود و می‌تواند نگاهی واقع‌گرایانه به مسایل مات‌زدایی داشته باشد.

یکی از محدودیت‌های روش به کار رفته، این است که به دلیل اعمال ریاضی موجود در آن، حافظه زیادی نیاز دارد و به همین دلیل نمی‌توان آن را بر روی تصاویر بزرگ‌تر به کار برد. در کارهای آینده بر روی روش‌هایی کار می‌کنیم که بتواند بر این محدودیت هم غلبه کند. در صورت موفقیت، می‌توان آزمایش‌های جامع‌تری را نیز انجام داد. همچنین در آینده می‌توان مدل ارائه‌شده را برای حالتی که تصویر مات‌شده همراه با نویز نیز می‌باشد، توسعه داد.

پیوست

لم ۱: بیشینه‌سازی یک عبارت مانند $\arg\max_{C} Tr[A(B+C)]$ با جستجو بر روی مقادیر محدودشده از C، یعنی $\|C\|_F \le \delta$، در $C_{\max} = \delta \times A^T / \|A\|_F$ رخ می‌دهد.

اثبات: تابع لاگرانژ با استفاده از ضریب مثبت دلخواه، $\lambda \ge 0$ برابر است با

$$\begin{aligned} L(C,\lambda) &= Tr[A(B+C)] - \lambda(\|C\|_F^2 - \delta^2) \\ &= Tr[A(B+C)] - \lambda(Tr[CC^T] - \delta^2) \end{aligned} \qquad (پ-۱)$$

با مشتق‌گرفتن از رابطه بالا، نسبت به ترانهاده متغیر مسأله و برابر صفر قرار دادن آن داریم

$$C_{\max} = \frac{1}{\lambda} A^T \qquad (پ-۲)$$

برای از بین بردن نقش پارامتر دلخواه λ، مجدداً از تابع لاگرانژ نسبت به λ مشتق می‌گیریم و پس از برابری با صفر داریم

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\delta} \|A^T\| \qquad (پ-۳)$$

با ترکیب دو نتیجه به دست آمده خواهیم داشت

$$C_{\max} = \delta \frac{A^T}{\|A\|_F} \qquad (پ-۴)$$

مقدار $\max_{C} Tr[A(B+C)]$ در $C_{\max}$ برابر با $Tr[AB] + \delta\|A\|_F$ می‌شود [۳۰].

مراجع

[1] J. G. N. PerChristian Hansen and D. P. O'Leary, *Deblurring Images Matrices, Spectra, and Filtering*, Siam, 2006.

[2] M. Gong, X. Jiang, and H. Li, "Optimization methods for regularization-based ill-posed problems: a survey and a multi-objective framework," *Front. Comput. Sci.*, vol. 11, no. 3, pp. 362-391, Jun. 2017.

[3] J. M. Bioucas-Dias, "Blind estimation of motion blur parameters for image deconvolution," in *Proc. Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis,* pp. 604-611, Girona, Spain, 6-8 Jun. 2007.

[4] S. Xie, X. Zheng, W. Z. Shao, Y. D. Zhang, T. Lv, and H. Li, "Non-blind image deblurring method by the total variation deep network," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 37536-37544, 2019.

[5] Y. Q. Liu, X. Du, H. L. Shen, and S. J. Chen, "Estimating generalized Gaussian blur kernels for out-of-focus image deblurring," *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 31, no. 3, pp. 829-843, Mar. 2020.

[۶] م. دهقان و م. محزون، "حذف تاری از تصاویر تارشده در اثر لرزش دوربین،" *هفتمین کنفرانس ماشین بینایی و پردازش تصویر*، ۵ صص.، تهران، ایران، ۲۶-۲۵ آبان ۱۳۹۰.

[7] M. Welk, "A robust variational model for positive image deconvolution," *Signal, Image Video Process.*, vol. 10, no. 2, pp. 369-378, 2016.

[8] M. Tofighi and O. Yorulmaz, "Phase and TV based convex sets for blind deconvolution of microscopic images," *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, vol. 4553, no. 1, pp. 1-11, Feb. 2015.

[9] H. Yang, X. Su, and S. Chen, "Blind image deconvolution algorithm based on sparse optimization with an adaptive blur kernel estimation," *Appl. Sci.*, vol. 10, no. 7, p. 2437, 2020.

[10] L. Chen, F. Fang, T. Wang, and G. Zhang, "Blind image deblurring with local maximum gradient prior," in *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1742-1750, Long Beach, CA, USA, 15-20 Jun. 2019.

[۱۱] ز. دلخسته و م. طالبی، "حذف اثر تاری ناشی از حرکت در تصاویر،" *چهارمین کنفرانس ملی فناوری اطلاعات، کامپیوتر و مخابرات*، ۱۸ صص.، مشهد، دانشگاه تربت حیدریه، ۲۲ تیر ۱۳۹۶.

[12] R. M. Kudupudi and A. K. Jagannatham, "Robust blurred image recovery using minimax and semi-definite programming approaches," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Multimedia and Expo, ICME'13*, 6 pp., San Jose, CA, USA, 15-19 Jul. 2013.

[13] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*, Technical University of Denmark, Nov. 2012.

[14] Y. Shi and Q. Chang, "Acceleration methods for image restoration problem with different boundary conditions," *Appl. Numer. Math.*, vol. 58, no. 5, pp. 602-614, 2008.

[15] Y. Xue-Fei, X. Ting-Fa, and B. Ting-Zhu, "Improved fixed point method for image restoration," *Chinese J. Opt. Appl. Opt.*, vol. 6, no. 3, pp. 318-324, 2013.

[16] R. C. Gonzalez, Digital Image Processing, vol. 14, no. 3. 2002.

[17] L. E. L. Ghaoui, "Robust Solutions to Least-Squares Problems with Uncertain Data," 1997.

[18] H. Ji and K. Wang, "Robust image deblurring with an inaccurate blur kernel," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 21, no. 4, pp. 1624-1634, Apr. 2012.

[19] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton University Press, 2009.

[20] E. A. Gharavol, Y. C. Liang, and K. Mouthaan, "Robust linear transceiver design in MIMO Ad Hoc cognitive radio networks," in *Proc. IEEE 71st Veh. Technol. Conf.*, 5 pp, Taipei, Taiwan, 16-19 May 2010.

[21] B. Zhang, Z. He, K. Niu, and L. Zhang, "Robust linear beamforming for MIMO relay broadcast channel with limited feedback," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 17, no. 2, pp. 209-212, Feb. 2010.

[22] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones," pp. 1-24, 1998.

[23] M. H. Al-Towaiq and Y. S. Abu, "Two improved classes of Broyden's methods for solving nonlinear systems of equations," *J. Math. Comput. Sci.*, vol. 17, pp. 22-31, 2017.

[24] F. Toutounian, J. Saberi-Nadjafi, and S. H. Taheri, "A hybrid of the newton-GMRES and electromagnetic meta-heuristic methods for solving systems of nonlinear equations," *J. Math. Model. Algorithms*, vol. 8, no. 4, pp. 425-443, 2009.

[25] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications, Siam, 2001.

[26] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

[27] A. Hore and D. Ziou, "Image quality metrics: PSNR vs. SSIM," in *Proc. Int. Conf. Pattern Recognit.*, pp. 2366-2369, Istanbul, Turkey, 23-26 Aug. 2010.

[28] U. Sara, M. Akter, and M. S. Uddin, "Image quality assessment through FSIM, SSIM, MSE and PSNR-a comparative study," *J. Journal of Computational Chemistry.*, vol. 7, no. 3, pp. 8-18, 2019.

[29] Z. Al-Ameen, "Faster deblurring for digital images using an ameliorated Richardson-Lucy algorithm," *IEIE Trans. Smart Process. Comput.*, vol. 7, no. 4, pp. 289-295, 2018.

[30] E. A. Gharavol, Y. C. Liang, and K. Mouthaan, "Robust downlink beamforming in multiuser MISO cognitive radio networks," in *Proc. IEEE 20th In. Symp. on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications* pp. 808-812, Tokyo, Japan,13-16 Sept. 2009.

زینب محمدی در سال ۱۳۹۳ مدرک کارشناسی مهندسی برق- الکترونیک خود را ازدانشگاه شهرکرد و در سال ۱۳۹۸ مدرک کارشناسی ارشد مهندسی برق- مخابرات سیستم خود را از دانشگاه فردوسی در مشهد دریافت نمود. زمینه‌های علمی موردعلاقه نام‌برده شامل روش‌های بهینه‌سازی محدب (Convex Optimization) در حل مسائل مهندسی برق و مخابرات سیستم مانند پردازش تصویر و پردازش ویدئو می‌باشد.

ابراهیم دانشی‌فر عضو هیأت علمی گروه مهندسی برق و پزشکی دانشگاه بین‌المللی امام رضا علیه‌السلام دارای مدرک دکتری در رشته مهندسی برق با گرایش مخابرات سیستم از دانشگاه ملی سنگاپور می‌باشد. ایشان یک دوره دوساله پسا دکتری در گروه مهندسی مخابرات دانشگاه لینشوپینگ را با همکاری شرکت اریکسون، در کشور سوئد گذرانیده است. عمده پژوهش های وی در به‌کارگیری روش‌های بهینه‌سازی محدب (Convex Optimization) در حل مسائل مهندسی برق و مخابرات سیستم، همانند طراحی و بهینه‌سازی فرستنده گیرنده‌های چند آنتنی و پردازش تصاویر است.

عباس ابراهیمی مقدم مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد برق گرایش مخابرات خودرا به‌ترتیب از دانشگاه‌های صنعتی شریف و صنعتی خواجه نصیر اخذ کرده است. ایشان مدرک دکتری خود را از دانشگاه مک‌مستر کانادا دریافت کرده و از سال ۱۳۹۰ به عنوان استادیار در دانشگاه فردوسی مشهد فعالیت علمی می‌نماید. زمینه‌های تحقیقاتی موردعلاقه ایشان پردازش گفتار، پردازش تصویر و ویدیو، بینایی ماشین و پردازش سیگنال‌های حیاتی است.

مرتضی خادمی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی برق به‌ترتیب در سالهای ۱۳۶۴ و ۱۳۶۶ در دانشگاه صنعتی اصفهان به پایان رسانده است. نام‌برده از سال ۱۳۶۶ الی ۱۳۷۰ به عنوان عضو هیأت علمی (مربی) در دانشگاه فردوسی مشهد به کار مشغول بود. پس از آن به دوره دکترای مهندسی برق در دانشگاه ولونگونگ (استرالیا) وارد گردیده و در سال ۱۳۷۴ موفق به اخذ درجه دکترا در مهندسی برق از دانشگاه مذکور گردید. دکتر خادمی از سال ۱۳۷۴ مجدداً در دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد مشغول به فعالیت گردید و اینک نیز استاد این دانشکده است. زمینه‌های علمی مورد علاقه نام‌برده مخابرات ویدئویی، فشرده‌سازی ویدئو، پردازش تصویر، پردازش سیگنال‌های پزشکی و پنهان‌سازی اطلاعات در ویدئو می‌باشد.