

جداسازی نقاط دو رنگ با دو-گوه با زاویه مشخص

مریم ملکی شهرکی، علیرضا باقری و مهدیس نیری

از مسایل دیگر جداسازی می‌توان به جداسازی مجموعه نقاط با درخت K سطحی اشاره کرد. جداسازی مجموعه نقاط R و B با درخت K سطحی با $K \leq \lceil \log n \rceil$ امکان‌پذیر است [۱۳]. یکی دیگر از مسایل جداسازی مسئله جداسازی نقاط به کمک یک نوار است و الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ برای تشخیص جدایی نقاط با نوار ارائه شده است [۱۲]. پس از آن اثبات شد این زمان، یک زمان بهینه می‌باشد [۱۴]. اگر مجموعه نقاط، جداپذیر به کمک نوار باشند آن گاه گزارش زوایای مربوط به شیب نوارهای جداکننده در زمان $O(n \log n)$ انجام می‌شود. پیدا کردن نوار با کمترین عرض و نوار با بیشترین عرض در [۱۵] بررسی شده است.

از مسایل دیگر جداسازی می‌توان به گوه جداکننده اشاره کرد. در زمان $O(n \log n)$ می‌توان مکان هندسی رئوس گوه‌های جداکننده را برای مجموعه نقاط قرمز و آبی گزارش کرد [۱۲] و [۱۵]، اگر مکان هندسی رئوس گوه‌های جداکننده از قبل محاسبه شده باشد به دست آوردن گوه جداکننده با کمترین و بیشترین زاویه نیز در زمان $O(n)$ امکان‌پذیر است [۱۲] و [۱۵].

از مسایل دیگر جداسازی مسئله دو-گوه^۵ جداکننده می‌باشد. دو مجموعه نقطه آبی و قرمز که به ترتیب با B و R نشان داده می‌شوند جداپذیر توسط دو-گوه هستند، اگر دو خط راست که همدیگر را در یک نقطه P قطع کرده‌اند وجود داشته باشند به طوری که P رأس دو-گوه باشد و $\{B_1, B_2\}$ بخش‌های B و $\{R_1, R_2\}$ بخش‌های R باشند، و این بخش‌های ایجاد شده روی صفحه به صورت یک در میان قرمز و آبی قرار گرفته باشند. اگر R و B دو مجموعه مجزا از نقاط در صفحه باشند، ناحیه رئوس دو-گوه‌های جداکننده B و R را می‌توان در زمان $O(n \log n)$ به دست آورد [۱۲]، [۱۶] و [۱۷] و جداپذیری این دو مجموعه توسط دو عدد گوه که از هم مجزا نیستند در زمان $O(n \log n)$ انجام می‌شود [۱۲] و [۱۴]. جداپذیری با دو عدد گوه مجزا از هم نیز در زمان $O(n^2 \log n)$ انجام می‌شود [۱۲] و [۱۴].

لازم به ذکر است که در مورد جداسازی مجموعه نقاط با اشکال هندسی دیگری مانند چندضلعی، مثلث، مستطیل، ال-شکل و غیره نیز کارهایی انجام شده است [۱۸] تا [۲۳].

در این مقاله مسئله یافتن تمام دو-گوه‌های جداکننده با زاویه مشخص از یک رأس داده‌شده را بررسی و حل می‌نماییم و برای آن الگوریتمی با زمان $O(n \log n)$ ارائه می‌دهیم. جداپذیری نقاط با دو-گوه قبلاً در [۱۲] بررسی شده و الگوریتمی در زمان $O(n \log n)$ برای آن ارائه شد که به محاسبه ناحیه‌هایی از صفحه که رئوس همه دو-گوه‌های جداکننده می‌توانند در آن قرار بگیرند می‌پردازد.

ساختار مقاله در ادامه به این صورت می‌باشد که در بخش دوم الگوریتم پیشنهادی برای جداسازی مجموعه نقاط قرمز و آبی با دو-گوه جداکننده با زاویه مشخص از یک رأس داده‌شده P مطرح می‌شود.

چکیده: مسئله پوشش از مسایل مهم و پرکاربرد در هندسه محاسباتی است که در این مسأله، نقاط بایستی با حداقل یک شکل هندسی پوشانده شوند. نوع خاصی از مسأله پوشش، مسئله جداسازی نقاط است که در این مسئله حداقل دو دسته نقطه وجود دارد که تمایز آنها با رنگ نشان داده می‌شود (برای مثال نقاط آبی و قرمز) و بایستی نقاط با یک شکل هندسی از هم جدا شوند که به این شکل هندسی، جداکننده می‌گویند. در این مقاله مسئله جداسازی نقاط آبی و قرمز با دو-گوه جداکننده با زاویه مشخص مورد بررسی قرار می‌گیرد. الگوریتم ارائه‌شده برای این مسأله تمام دو-گوه‌های جداکننده با زاویه مشخص را در زمان بهینه $O(n \log n)$ گزارش می‌کند.

کلیدواژه: هندسه محاسباتی، پوشش، جداسازی، دو-گوه، الگوریتم، نقاط دو رنگ.

۱- مقدمه

مسأله پوشش^۱ از مسایل مهم در هندسه محاسباتی می‌باشد و تا کنون کارهای بسیاری در این زمینه انجام شده است. در دیدگاهی اولیه از مسئله پوشش فرض می‌شود یک مجموعه شکل هندسی مانند نقطه در صفحه داده شده است و هدف، پوشش این مجموعه با یک یا تعداد بیشتری شکل هندسی مانند مستطیل است. انواع مختلفی از مسایل پوشش قابل تعریف می‌باشند و تا کنون مسایلی مانند پوشش با پوسته محدب [۱]، دایره [۲]، نوار^۲ [۳]، مثلث [۴] و [۵]، مستطیل [۶]، ال-شکل [۷]، گوه^۳ [۸] و غیره بررسی و حل شده است. مسأله پوشش مجموعه نقاط تک‌رنگ با اشکال هندسی دارای کاربردهایی در زمینه مدارات VLSI و مکان‌یابی تسهیلات می‌باشد [۹].

نوع خاصی از مسأله پوشش، مسئله جداسازی^۴ است و کاربردهای گسترده و مهمی در زمینه دسته‌بندی، خوشه‌بندی و یادگیری ماشین دارد [۱۰]. کارهای زیادی در زمینه جداسازی نقاط انجام شده که به مرور به بعضی از آنها پرداخته می‌شود.

جداسازی نقاط با خط جزء اولین مسایل در زمینه جداسازی نقاط است. الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(n)$ برای تشخیص آن که مجموعه نقاط، جداپذیر خطی هستند یا خیر ارائه شده [۱۱] و همچنین الگوریتمی برای یافتن تمام خط‌های جداکننده با مرتبه زمانی $O(n)$ ارائه شده است [۱۲].

این مقاله در تاریخ ۹ آبان ماه ۱۳۹۳ دریافت و در تاریخ ۲۰ اسفند ماه ۱۳۹۴ بازنگری شد.

مریم ملکی شهرکی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شمال، تهران، (email: m.malekishahraki@yahoo.com).

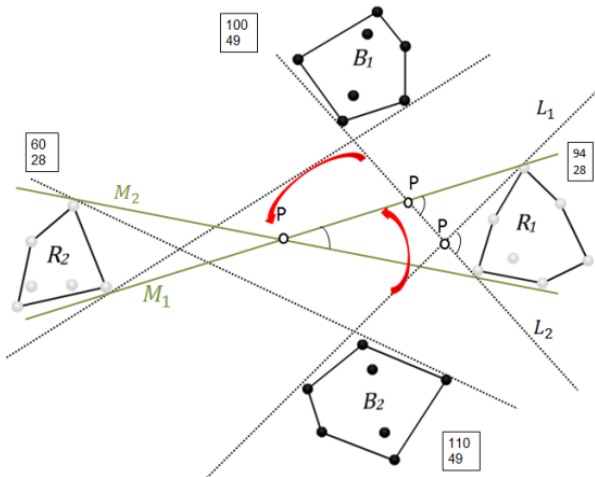
علیرضا باقری، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: ar_bagheri@aut.ac.ir).

مهدیس نیری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شمال، تهران، (email: mahdis_nayeri@yahoo.com).

1. Covering
2. Strip
3. Wedge
4. Separating

5. Double Wedge

6. Partition



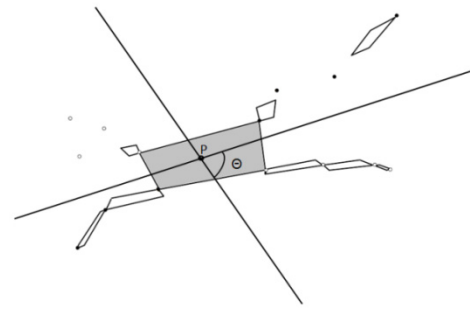
شکل ۳: روش به دست آوردن دو-گوه با حداکثر (حداقل) زاویه و بازه زاویه برای هر گوشه چهارضلعی.

جداکننده با زاویه Θ است و هر جا کلمه چهارضلعی استفاده شد منظور ناحیه‌ای است که رأس داده‌شده برای رسم دو-گوه با زاویه Θ در آن قرار می‌گیرد.

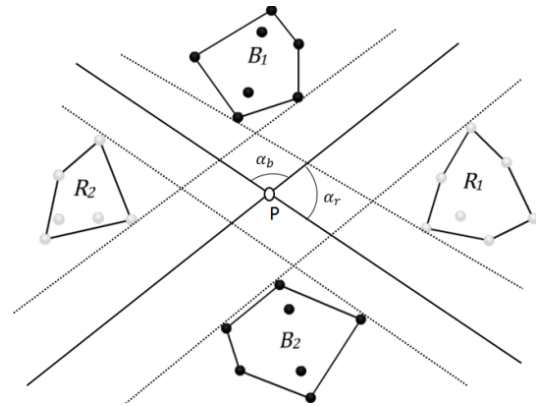
همان طور که قبلاً در [۱۲]، [۱۶] و [۱۷] بیان شده است منظور از دو-گوه با حداکثر زاویه، دو-گوهی با زاویه $\max\{\alpha_r, \alpha_b\}$ است که α_r زاویه دو-گوه در بخش‌های دربرگیرنده زیرمجموعه‌های نقاط قرمز و α_b زاویه دو-گوه در بخش‌های دربرگیرنده زیرمجموعه‌های نقاط آبی می‌باشد. در شکل ۲ زاویه α_r و α_b نشان داده شده است.

چون $\alpha_r + \alpha_b = \pi$ است پس به دست آوردن دو-گوه با حداقل و حداکثر زاویه مسئله‌ای واحد است. در [۱۴]، [۲۴] و [۲۵] مطرح شده که در هر ناحیه چهارضلعی، دو-گوه با حداکثر زاویه یا یکی از دو-گوه‌ها با رأس گوشه‌های چهارضلعی است یا با حرکت دادن رأس هر یک از دو-گوه‌ها (در گوشه‌های چهارضلعی) روی محیط چهارضلعی به دست می‌آید. با این روش می‌توانیم دو-گوه با حداقل و حداکثر زاویه را به دست آوریم. به عنوان مثال برای شکل ۳ بررسی زاویه گوشه چهارضلعی که دربرگیرنده R_1 است به این صورت می‌باشد که در ابتدا زاویه دو-گوه با رأس گوشه چهارضلعی را که دربرگیرنده R_1 است به دست می‌آوریم، سپس رأس P را روی محیط چهارضلعی حرکت می‌دهیم به این صورت که خط L_1 (یا L_2) را طوری که مماس بر R_1 باقی بماند در چپتی که R_1 قرار ندارد تا جایی که ممکن است (خط دوران بر CH دیگری مماس شود) دوران می‌دهیم، به خط M_1 می‌رسیم و می‌بینیم که رأس P جابه‌جا شده و یک دو-گوه دیگری ایجاد می‌شود و زاویه دو-گوه جدید کاهش یافته است، این زاویه را یادداشت می‌کنیم. اما رأس این دو-گوه ایجادشده هنوز قابلیت حرکت را با دوران خط L_1 دارد، وقتی خط L_1 را طوری که مماس بر R_1 باقی بماند در چپتی که R_1 قرار ندارد تا جایی که ممکن است دوران می‌دهیم می‌بینیم که خط M_1 ایجاد می‌شود، زاویه دو-گوه ایجادشده در این حالت را نیز یادداشت می‌کنیم. این کار را می‌توانیم به این صورت که رأس P در ابتدا با دوران خط L_1 حرکت کند انجام دهیم. بین زاویای به دست آمده حداقل و حداکثر می‌گیریم (طریقه دوران دادن در بخش ۳ توضیح داده شده است).

این کار را برای همه رئوس چهارضلعی انجام می‌دهیم. برای هر گوشه یک زاویه حداقل و حداکثر به دست می‌آید و بین چهار بازه زاویه‌ای به دست آمده برای چهار گوشه چهارضلعی حداقل و حداکثر می‌گیریم و به این صورت دو-گوه با کمترین و بیشترین زاویه به دست می‌آید.



شکل ۱: رسم دو-گوه جداکننده با زاویه Θ از یک رأس داده‌شده داخل یکی از چهارضلعی‌ها.



شکل ۲: زاویه α_r و α_b در دو-گوه جداکننده.

در بخش سوم مرتبه زمانی الگوریتم محاسبه می‌شود و در بخش چهارم نتیجه‌گیری و کارهای آتی مطرح می‌گردد.

۲- الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم ما توسعه‌ای از الگوریتم جداسازی نقاط با دو-گوه است [۱۲]، [۱۴]، [۱۶] و [۱۷] و به این صورت است که ابتدا الگوریتم جداسازی با دو-گوه را روی نقاط اجرا کرده و چهارضلعی‌هایی که رأس دو-گوه می‌توانند در آنها قرار بگیرند را حساب می‌کنیم (شکل ۱). سپس برای چهارضلعی‌ای که رأس داده‌شده در آن قرار گرفته است قسمت‌هایی را که نمی‌توان دو-گوه با زاویه داده‌شده Θ رسم کرد محاسبه می‌کنیم که آن نواحی را نواحی نشدنی^۱ و نواحی باقیمانده را نواحی شدنی^۲ می‌نامیم. بعد از آن روشی ارائه می‌دهیم که با استفاده از آن می‌توانیم از هر رأس دلخواه در ناحیه شدنی تمام دو-گوه‌های جداکننده با زاویه Θ را با حداکثر ۲ بررسی در زمان $O(n \log n)$ گزارش کنیم. در ادامه هر یک از مراحل الگوریتم را توضیح می‌دهیم.

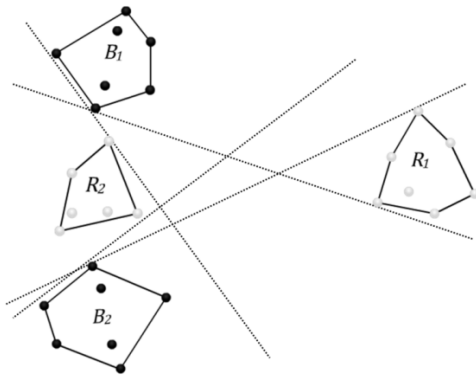
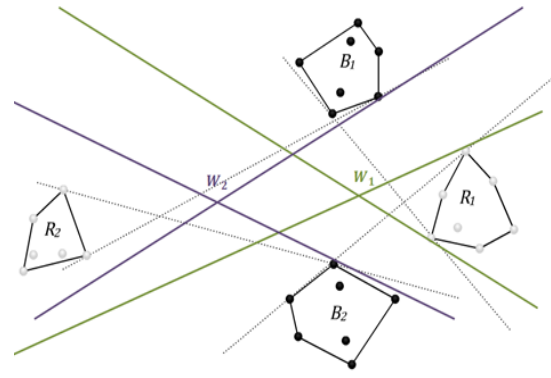
۱-۲ بررسی قابل رسم بودن دو-گوه جداکننده با

زاویه Θ

برای بررسی قابل رسم بودن دو-گوه با یک رأس و زاویه مشخص Θ باید دو-گوه جداکننده قابل رسم با حداقل و حداکثر زاویه (پهنا) را در چهارضلعی که رأس دو-گوه در آن قرار گرفته است مشخص کنیم. این دو-گوه در صورتی قابل رسم است که زاویه Θ در بازه زاویه‌ای دو-گوه با حداقل و حداکثر زاویه قرار بگیرد.

از این به بعد هر جا از کلمه دو-گوه استفاده شد، منظور دو-گوه

1. Infeasible
2. Feasible

شکل ۵: عدم وجود دو-گوه مماس محیطی برای B_1 و B_2 .

شکل ۴: دو-گوه‌های مماس (حد نهایت).

اثبات) طبق لم ۳-۶، در [۱۲] هر کدام از اضلاع چهارضلعی‌هایی که مشخص‌کننده رؤس دو-گوه‌های جداکننده هستند اجتماع نیم‌صفحه‌هایی هستند که دو CH را از دو CH دیگر جدا می‌کنند. حالتی پیش می‌آید که نیم‌صفحه‌ای که دو CH را باید از هم جدا کند، CH دیگر را قطع می‌کند در حالی که باید طوری رسم شود که CH را قطع نکند. در این حالت دیگر نیم‌صفحه جداکننده دو CH بر هر دو CH مربوطه مماس نیست بلکه بر یکی از آنها و CH که قطع می‌شود مماس می‌شود (شکل ۵). در این حالت برای CH که دو-گوه مماس با رأس گوشه چهارضلعی ندارد هیچ دو-گوه مماسی وجود ندارد.

۱

برای مثال در شکل ۵ می‌بینیم که برای B_1 و B_2 نمی‌توان هیچ دو-گوه مماس محیطی رسم کرد، به این دلیل که برای مثال در B_1 یکی از خط‌های دو-گوه مماس محیطی باید R_1 و B_1 را از R_2 و B_2 جدا کند و خط دیگر باید R_1 و B_1 را از R_2 و B_2 جدا کند. در شکل می‌بینیم خطوطی که R_1 و B_1 را از R_2 و B_2 جدا می‌کنند، تحت هیچ شرایطی به B_1 مماس نمی‌شود چون قبل از آن که به B_1 برسند به R_2 مماس می‌شوند و جلوتر هم نمی‌توانند بروند و به عبارتی حداکثر تا R_2 پیش می‌روند.

مشاهده ۲-۲) برای CH ‌هایی که دو-گوه با رأس گوشه چهارضلعی بر آنها مماس نیست، برای به دست آوردن دو-گوه با حداقل و حداکثر زاویه، فقط بر روی ضلعی از چهارضلعی که بر CH مماس است تغییر زاویه را بررسی می‌کنیم.

برای به دست آوردن ناحیه نشدنی برای دو-گوه‌ها با زاویه θ در ابتدا وجود دو-گوه‌های مماس محیطی با زاویه θ را برای هر CH بررسی می‌کنیم.

لم ۲-۲) اگر θ در بازه زاویه‌ای یک گوشه چهارضلعی که دو-گوه متناظر آن مماس محیطی بر یکی از CH ‌ها است، باشد دو-گوه مماس محیطی با زاویه θ برای آن CH وجود دارد و رأس این دو-گوه‌ها روی بخشی از زنجیره کمان‌های آن CH قرار می‌گیرند.

اثبات) با توجه به نحوه به دست آوردن بازه زاویه‌ای برای هر گوشه که دارای دو-گوه مماس محیطی است بازه به دست آمده نشان‌دهنده دو-گوه‌های مماس محیطی با حداقل و حداکثر زاویه برای آن گوشه است و بنابراین اگر زاویه θ در این بازه قرار بگیرد قطعاً دو-گوه مماس محیطی با زاویه θ در آن گوشه برای CH مربوطه وجود دارد.

با توجه به آنچه که در [۲۳] مطرح شده است در جداسازی نقاط با مثلث θ ، برای محاسبه خط سیر رأس با زاویه θ مثلث از ایده مطرح‌شده در مسأله جداسازی کلیه نقاط با مستطیل [۲۲] استفاده شده است که در

با توجه به آنچه گفته شد اگر برای هر گوشه چهارضلعی بیشترین کمترین زاویه را با روش گفته‌شده به دست آوریم یک بازه زاویه برای هر گوشه داریم. در شکل ۳، ۴ گوشه‌های چهارضلعی حرکت داده شده، بازه زاویه‌ای هم برای هر گوشه در کنار CH آن نوشته شده است، به این بازه‌های به دست آمده در ادامه الگوریتم نیاز داریم.

۲-۲ به دست آوردن نواحی نشدنی برای دو-گوه‌ها با

زاویه θ

تعریف ۱-۲) دو-گوه‌هایی با زاویه θ وجود دارند که نمی‌توانند در هیچ جهتی حول مرکز دو-گوه بچرخند، به عبارتی آنها یک حد نهایت برای دو-گوه‌ها با زاویه θ هستند. هر یک از خط‌های این دو-گوه‌ها بر دو CH هم‌رنگ یا یک CH مماس است که آنها را به ترتیب دو-گوه مماس محاطی^۲ و محیطی^۳ می‌نامیم (شکل ۴).

برای حل مسئله، نواحی‌ای از چهارضلعی را که رأس دو-گوه با زاویه θ نمی‌تواند در آنجا قرار بگیرد مشخص می‌کنیم و برای این کار باید دو-گوه‌های مماس محاطی و مماس محیطی با زاویه θ را پیدا کنیم.

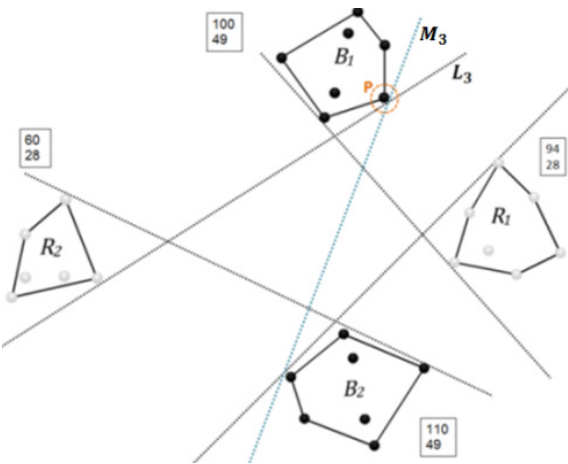
مشاهده ۱-۲) اگر دو-گوه مماس محیطی با زاویه θ رسم کنیم (برای مثال W_1 در شکل ۴) تمام دو-گوه‌های جداکننده که رأس مرکز آنها در بخشی از دو-گوه W_1 که دربرگیرنده R_1 است، قرار دارند قطعاً زاویه‌ای بزرگ‌تر از θ دارند و بنابراین در این ناحیه نمی‌توان دیگر دو-گوه‌ای با زاویه θ رسم کرد.

به همین ترتیب اگر دو-گوه مماس محاطی با زاویه θ رسم کنیم (برای مثال W_2 در شکل ۴) تمام دو-گوه‌های جداکننده با رأس مرکز در بخشی از دو-گوه W_2 که دربرگیرنده R_2 هستند، قطعاً زاویه‌ای کوچک‌تر از θ دارند و بنابراین در این ناحیه نمی‌توان دیگر دو-گوه‌ای با زاویه θ رسم کرد.

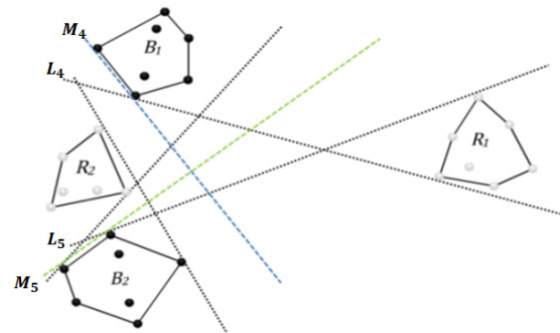
به این ترتیب اگر مکان قرارگیری رأس دو-گوه‌های مماس محیطی و محاطی با زاویه θ را برای CH ‌ها در محدوده چهارضلعی پیدا کنیم آن‌گاه مشخص می‌شود در برخی محدوده‌ها نمی‌توان دو-گوه با زاویه θ رسم کرد.

لم ۲-۱) برای یک CH حداقل یک دو-گوه مماس محیطی وجود دارد اگر و فقط اگر یکی از دو-گوه‌های با رأس گوشه‌های چهارضلعی بر آن مماس محیطی باشد.

1. Convex Hull
2. Inscribed
3. Perimital



شکل ۸: یافتن رأس CH های هم‌رنگ برای رسم کمان دو-گوه مماس محاطی (حالتی که یک رأس در رسم کمان در هر CH دخیل است).

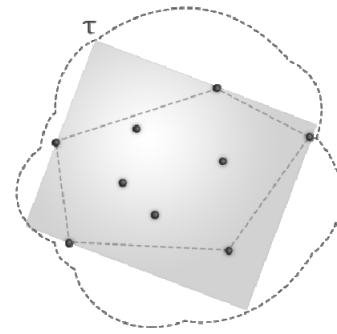


شکل ۹: یافتن رأس CH های هم‌رنگ برای رسم کمان دو-گوه مماس محاطی (حالتی که بیش از یک رأس در رسم کمان در هر CH دخیل است).

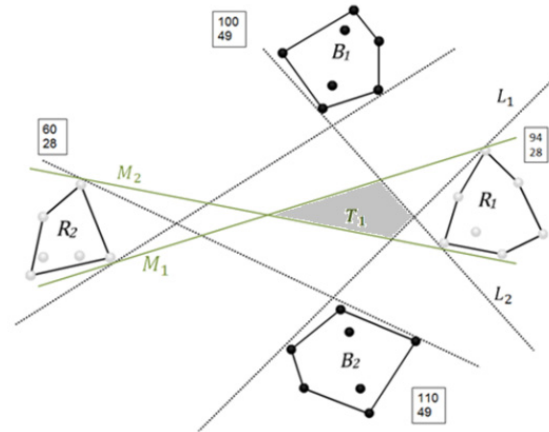
فقط بخشی از زنجیره‌های کمان‌های مربوط به هر CH قابل قبول است که در این ناحیه‌ها قرار بگیرند.

برای CH هایی که دو-گوه مماس محیطی ندارند یا زنجیره کمان دو-گوه مماس محیطی با زاویه \ominus آنها خارج از محدوده چهارضلعی می‌افتد، باید کمان‌های مربوط به دو-گوه‌های مماس محاطی با زاویه \ominus که حد نهایت دو-گوه‌ها با زاویه \ominus در آن گوشه هستند را پیدا کرده که در ادامه توضیح می‌دهیم.

برای مثال در شکل ۷ اگر فرض کنیم می‌خواهیم دو-گوه با زاویه 75° درجه داشته باشیم، کمان دو-گوه مماس محیطی با زاویه 75° درجه برای R_p خارج از محدوده چهارضلعی قرار می‌گیرد. مشخص است که دو-گوه‌های مماس محاطی نسبت به B_p و B_1 با زاویه 75° درجه وجود دارند (با توجه به بازه زاویه‌های به دست آمده) که رأس این دو-گوه‌ها روی یک کمان قرار دارند اما مشخص نیست که نسبت به کدام رأس‌های این دو CH باید کمان‌ها رسم شوند. برای مشخص شدن رأس‌ها در ابتدا هر کدام از خط‌هایی که اضلاع چهارضلعی در گوشه مورد بحث را تشکیل می‌دهند طوری که همچنان مماس بر CH های مربوط به دو-گوه مماس محاطی باشند دوران می‌دهیم. اگر در طی دوران دادن هر یک از خطوط، رأس تغییر نکند متوجه می‌شویم همان رأس در رسم کمان دخیل است (برای مثال در شکل ۸ با دوران خط L_p بدون این که رأس CH تغییر کند خط M_p ایجاد می‌شود) اما اگر رأسی تغییر کند (برای مثال در شکل ۹ با دوران خط L_p در مکان ایجاد خط M_p رأس B_1 عوض می‌شود، همین‌طور با دوران L_6 در محل ایجاد M_6 رأس B_p عوض می‌شود) به محض تغییر رأس خطی در محدوده چهارضلعی رسم می‌کنیم



شکل ۶: خط سیر τ .



شکل ۷: ناحیه T_1 برای R_1 .

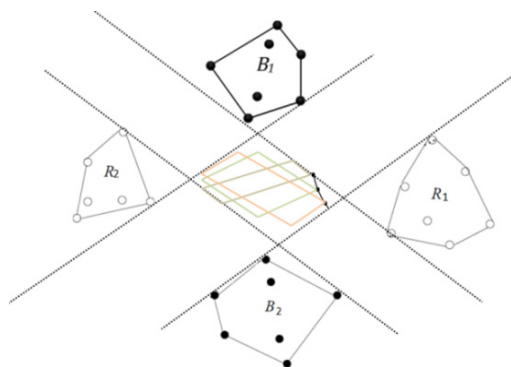
آن محل قرارگیری رئوس قائمه مستطیل مماس بر یک CH ، زنجیره‌ای از کمان‌های دایره‌ای حول CH مربوطه می‌باشد. برای جداسازی نقاط با مثلث \ominus هم محل قرارگیری رأس \ominus مثلث مماس بر CH مربوطه نیز روی مجموعه‌ای از کمان‌های دایره‌ای واقع است که به آن خط سیر رأس \ominus گفته می‌شود و با τ نشان داده می‌شود. این کمان‌های دایره‌ای با چرخش کامل رأس \ominus حول CH مربوطه به اندازه زاویه 2π به دست می‌آیند. شکل ۶ خط سیر τ را برای زاویه 90° درجه به صورت منحنی‌های خط‌چین نشان می‌دهد.

ما نیز از این ایده استفاده می‌کنیم. چنانچه گفته شد زاویه \ominus نسبت به یک CH روی زنجیره‌ای از کمان‌ها قرار گرفته و واضح است که برای رسم دو-گوه مماس محیطی با زاویه \ominus رأس دو-گوه باید روی این زنجیره قرار بگیرد و البته فقط بخشی از زنجیره قابل قبول است که در ناحیه چهارضلعی قرار بگیرد.

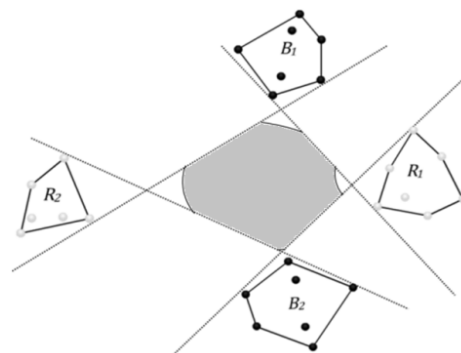
برای گوشه‌هایی که دو-گوه مماس محیطی دارند مکان قرارگیری رئوس دو-گوه‌های مماس محاطی را بررسی نمی‌کنیم زیرا یا مکان قرارگیری رئوس آنها داخل چهارضلعی و خارج از کمان مربوط به دو-گوه‌های مماس محیطی است که نیازی به بررسی ندارند یا مکان قرارگیری آنها کاملاً خارج از چهارضلعی است.

لم ۲-۳) برای CH هایی که دو-گوه مماس محیطی دارند و حداقل بخشی از زنجیره کمان‌های آنها داخل چهارضلعی قرار می‌گیرد، فقط قسمتی از کمان‌ها قابل قبول هستند که در ناحیه مکان هندسی تمام دو-گوه‌های مماس محیطی CH مربوطه قرار بگیرند.

اثبات) با توجه به این که مکان هندسی تمام دو-گوه‌های مماس محیطی‌ای که زاویه آنها بین بازه مشخص شده برای CH های مربوط به آنها است را داریم (برای مثال ناحیه T_1 در شکل ۷) کاملاً واضح است که



شکل ۱۲: تغییر منظم متوازی‌الاضلاع‌های یک کمان.



شکل ۱۰: کمان‌های دو-گوه‌های مماس برای زاویه ۷۵ درجه.

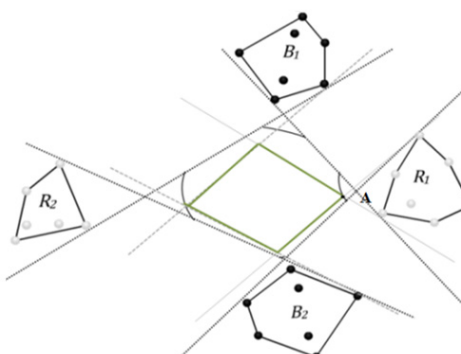
کمان به دست آوریم (یعنی مشخص کنیم متوازی‌الاضلاع‌ها برای هر کمان از کجا شروع می‌شوند و تا کجا ادامه دارند) که آن را محدوده Q می‌نامیم، آن گاه با روشی که در ادامه توضیح داده می‌شود می‌توانیم دو-گوه با زاویه Θ را رسم کنیم.

۲-۳-۱ ناحیه‌بندی کمان‌ها

تعریف ۲-۳ ناحیه‌بندی هر کمان به این صورت تعریف می‌شود: برای یافتن محدوده Q باید کمان‌ها را ناحیه‌بندی کنیم، یعنی مشخص کنیم در قسمت‌های مختلف کمان، خط‌های موازی دو-گوه‌های مماس با رأس قرارگرفته روی کمان آن ناحیه بر کدام CH ‌ها مماس می‌شوند زیرا تا زمانی که این خط‌ها بر CH ‌های مشخص مماس شوند متوازی‌الاضلاع‌ها با یک نظم مشخصی تغییر می‌کنند. مثلاً در شکل ۱۲ متوازی‌الاضلاع‌ها در کل کمان با نظم مشخصی تغییر می‌کنند (همراه با چرخش از راست به چپ، طول کم می‌شود، عرض اضافه می‌شود) که در این حالت مشخص کردن محدوده Q راحت است.

گاهی در کل کمان ترتیب تغییر متوازی‌الاضلاع‌ها منظم نیست و برای به دست آوردن محدوده Q کل کمان را یک جا نمی‌توانیم بررسی کنیم زیرا اضلاع متوازی‌الاضلاع‌ها از مماس شدن بر چند CH به دست آمده‌اند (به عبارتی مانند شکل ۱۲ در کل کمان خط‌های دو-گوه‌ها که به طور موازی حرکت داده می‌شد بر یک CH مماس نمی‌شود). در این صورت باید ناحیه‌هایی از کمان که خط‌های موازی هر خط دو-گوه‌های مماس با رأس کمان بر یک CH مماس می‌شود را مشخص کنیم و برای هر ناحیه از کمان محدوده Q را به دست آوریم که این کار را ناحیه‌بندی کمان می‌نامیم.

ناحیه‌بندی کمان‌ها را برای هر کمان باید یک بار برای خطی از دو-گوه‌ها که جداکننده R_1 و B_1 از R_2 و B_2 (این خط‌ها را مجموعه S می‌نامیم) و یک بار هم برای خطی از دو-گوه‌ها که جداکننده R_1 و B_1 از R_2 و B_2 (این خط‌ها را مجموعه N می‌نامیم) هستند انجام دهیم. برای مثال ناحیه‌بندی کمان در شکل ۱۳ برای کمان R به این صورت است که ابتدا خط K از مجموعه N را از شروع کمان رسم می‌کنیم. می‌بینیم که B_1 به K نزدیک‌تر است و بنابراین خط موازی K قبل از R_1 به B_1 مماس می‌شود. اگر خط K را طوری که مماس بر R_1 باشد روی کمان دوران دهیم تا به انتهای کمان برسیم، متوجه می‌شویم که از نقطه O خط موازی K به R_1 نزدیک‌تر است و بنابراین برای خط‌های مجموعه N کمان به دو ناحیه تقسیم‌بندی شد. در هر ناحیه یادداشت می‌کنیم که خط‌های موازی خط‌های مجموعه N بر کدام CH مماس می‌شوند و همین بررسی را می‌توانیم برای خط‌های مجموعه S نیز انجام دهیم.



شکل ۱۱: متوازی‌الاضلاع مربوط به هر رأس روی کمان.

و در نهایت چهارضلعی به ناحیه‌هایی که با این خطوط مشخص شده‌اند تقسیم می‌شود و در هر ناحیه نسبت به رأس‌هایی که آن ناحیه مشخص کرده است کمان را رسم می‌کنیم. این کار را می‌توان به این صورت انجام داد که مماس داخلی بین دو CH را رسم کنیم، اگر رأس تغییر کرده بود نسبت به رأس قبلی و رأس جدید یک خط رسم می‌کنیم و این کار را تا رسیدن به رأس اولیه انجام می‌دهیم (شکل ۹).

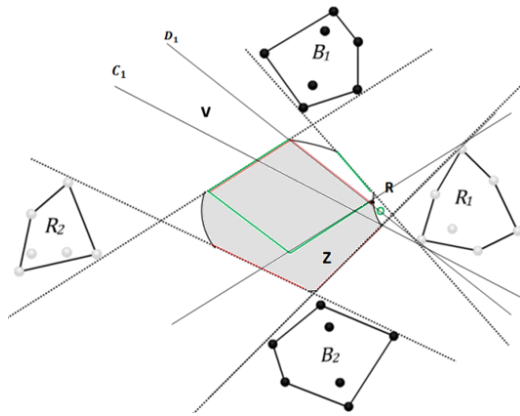
وقتی کمان‌های چهار گوشه چهارضلعی را رسم کردیم، به عبارتی ناحیه‌هایی از چهارضلعی را که رأس دو-گوه با زاویه Θ نمی‌تواند در آنجا قرار بگیرد مشخص کرده‌ایم، به این صورت که با توجه به آنچه که قبلاً گفته شد برای کمان‌های دو-گوه‌های مماس محیطی ناحیه داخل کمان و برای کمان‌های دو-گوه‌های مماس محاطی ناحیه خارج از کمان نمی‌تواند ناحیه رأس دو-گوه با زاویه Θ باشد (شکل ۱۰، قسمت هاشورخورده ناحیه مجاز می‌باشد).

۲-۳-۲ رسم دو-گوه با زاویه Θ در ناحیه شدنی

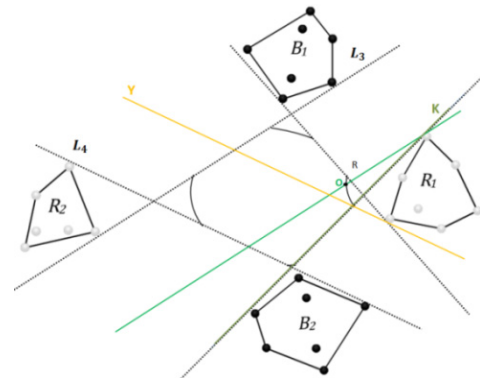
حال که نواحی‌ای از چهارضلعی را که رأس دو-گوه با زاویه Θ نمی‌تواند در آنجا واقع شود پیدا کردیم، باید چگونگی رسم دو-گوه با زاویه Θ از رأس داده‌شده در ناحیه شدنی را بررسی کنیم.

تعریف ۲-۲ متوازی‌الاضلاع مربوط به هر رأس روی کمان‌ها را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر از روی کمان‌ها دو-گوه مماس با زاویه Θ را رسم کنیم (مثلاً در شکل ۱۱ دو-گوه A را رسم کردیم) و خط‌های آن را به طور موازی حرکت دهیم تا بر CH مماس شود، محدوده حرکت رأس این دو-گوه‌ها تشکیل متوازی‌الاضلاع می‌دهد. مشخص است که اگر از هر رأسی داخل این متوازی‌الاضلاع دو-گوهی رسم کنیم که خط‌های آن موازی اضلاع متوازی‌الاضلاع باشد قطعاً دو-گوهی با زاویه Θ است.

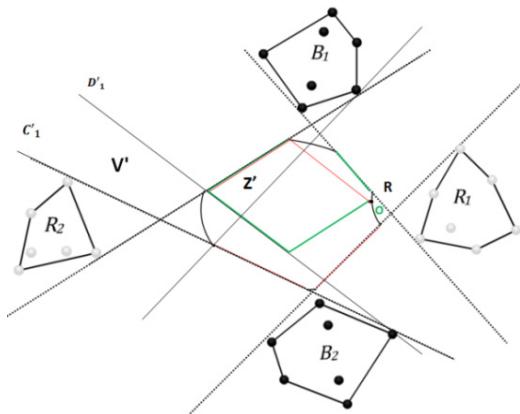
روی هر کمان بی‌شمار نقطه وجود دارد و بنابراین ما بی‌شمار متوازی‌الاضلاع داریم. اگر محدوده تغییر متوازی‌الاضلاع‌ها را برای هر



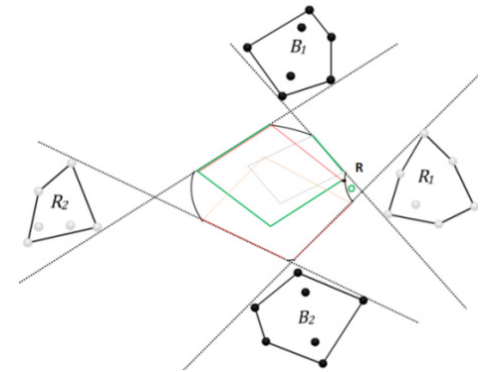
شکل ۱۵: محدوده محیط متوازی الاضلاعها.



شکل ۱۳: ناحیه بندی کمان R.



شکل ۱۶: محدوده محیط متوازی الاضلاعها (با توجه به حرکت موازی خطوط).



شکل ۱۴: محدوده متوازی الاضلاعها.

که کدام کمانها (یا ناحیه از کمانها) در قسمت پوشش داده نشده قرار گرفته‌اند. ناحیه متوازی الاضلاع آنها را فقط در قسمت پوشش داده نشده به دست می‌آوریم یعنی خط انتهایی را تا قبل از وارد شدن به ناحیه پوشش داده شده در نظر می‌گیریم. این کار را آن قدر تکرار می‌کنیم تا کل ناحیه چهارضلعی توسط محدوده متوازی الاضلاع پوشش داده شود (حداکثر ۴ بار به تعداد کمان‌های چهار گوشه چهارضلعی).

بعد از مشخص شدن محدوده متوازی الاضلاعها باید در مورد محل قرارگیری رأس نکاتی را ذکر کنیم که اگر در هر ناحیه از کمان خطهای مجموعه S را طوری که بر CH کمان مماس باشند برای ابتدا و انتهای ناحیه رسم کنیم، برای مثال خط D_1 و C_1 در شکل ۱۵ را رسم می‌کنیم (لازم به ذکر است که می‌دانیم در ناحیه هاشورخورده مشخص شده در شکل ۱۵ خطهای مجموعه S دو-گوه‌ها یا بر R_1 مماس می‌شوند یا بر B_1 و خطهای مجموعه N نیز یا بر R_1 مماس می‌شوند یا B_1). مشخص است که ناحیه v (ناحیه بین دو خط D_1 و C_1) دربرگیرنده ضلعی از اضلاع متوازی الاضلاعهای مربوط به کمان است. وضعیت برای خطهای مجموعه N که از ابتدا و انتهای هر ناحیه از کمان مماس بر CH کمان رسم می‌کنیم نیز به این صورت است. به عبارتی ناحیه Z هم دربرگیرنده ضلعی از اضلاع متوازی الاضلاعهای مربوط به کمان است.

برای مجموعه S دو خطی که از ابتدا و انتهای ناحیه مماس بر R_1 رسم کردیم را به طور موازی حرکت می‌دهیم تا به CH مماس شود. مشخص است ناحیه به وجود آمده (V') ناحیه عرض یا طول دیگری از اضلاع متوازی الاضلاعها است. برای مجموعه N نیز همین کار را انجام می‌دهیم (شکل ۱۶) و در نهایت شکل ۱۷ حاصل می‌شود.

به عبارتی برای ناحیه بندی کمان می‌توانیم هر کدام از اضلاع چهارضلعی که دربرگیرنده کمان مربوطه نباشند را به طور موازی حرکت دهیم تا کمان را قطع کنند و بر CH مماس شوند. حالتی پیش می‌آید که خطی که به طور موازی آن را حرکت داده‌ایم کمان را قطع نمی‌کند. برای مثال در شکل ۱۳، خط موازی L_4 این گونه است کمان R را قطع نمی‌کند، در این حالت متوجه می‌شویم که کل مجموعه S به یک CH نزدیک‌تر است.

۲-۳-۲ مشخص کردن محدوده متوازی الاضلاعها

با انجام ناحیه بندی کمانها دیگر مطمئن هستیم که در هر ناحیه از هر کمان متوازی الاضلاعها با یک ترتیب خاصی تغییر می‌کنند و می‌خواهیم بدانیم که متوازی الاضلاعهای هر ناحیه از کمان چه محدوده‌ای از ۴ضلعی را به خود اختصاص می‌دهند. برای این کار متوازی الاضلاعهای ابتدا و انتهای هر ناحیه از کمان را رسم می‌کنیم. با این کار ترتیب تغییر آنها مشخص می‌شود و واضح است که محدوده آنها از اولین ضلع طولی (عرضی) تا آخرین ضلع طولی (عرضی) از دو متوازی الاضلاع است (شکل ۱۴).

با توجه به این که متوازی الاضلاعها با یکدیگر هم‌پوشانی دارند لازم نیست محدوده آنها را برای همه کمانها رسم کرد. برای آن که مشخص کنیم محدوده متوازی الاضلاع کدام کمانها را باید به دست آوریم به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا کمانها را ناحیه بندی می‌کنیم. از بین کمان‌های چهار گوشه چهارضلعی هر کدام را می‌توانیم انتخاب کنیم اما کمانی را انتخاب می‌کنیم که به تعداد بیشتری ناحیه تقسیم شده است زیرا حالت‌های متفاوت بیشتری از متوازی الاضلاعها را نشان می‌دهد و اغلب محدوده بیشتری از چهارضلعی را پوشش می‌دهد. وقتی محدوده متوازی الاضلاعها مشخص شد اگر ناحیه‌ای از چهارضلعی پوشش داده نشده بود، با توجه به این که اگر رأس در آن قسمت قرار بگیرد هیچ تحلیلی برای چگونگی رسم دو-گوه جداکننده نداریم باید بررسی کنیم

می‌دهیم تا به نقطه P برسیم.

بعد از رسم دو-گوه با زاویه \ominus از رأس داده شده P با دوران این دو-گوه در جهت و خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌توانیم زاویه چرخش دو-گوه با زاویه \ominus از رأس P (به عبارتی تمام دو-گوه‌ها با زاویه \ominus از رأس P) را به دست آوریم. شبه‌کد الگوریتم در ادامه آمده است.

الگوریتم پیدا کردن دو-گوه جداکننده با زاویه \ominus

ورودی: مجموعه نقاط قرمز و آبی به اندازه کلی n و رأس P .
خروجی: گزارش تمام دو-گوه‌های تفکیک کننده با زاویه \ominus از یک رأس داده شده.

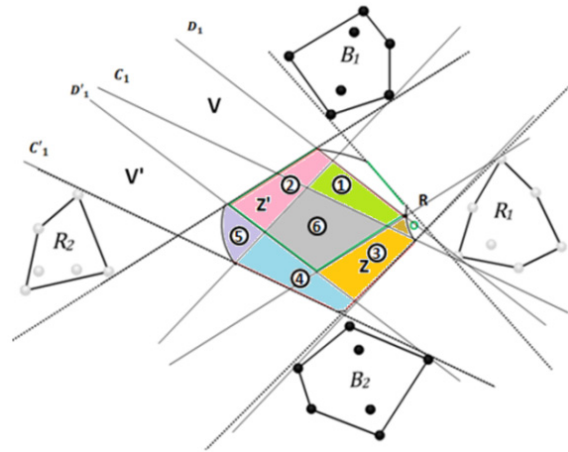
- (۱) محاسبه ناحیه‌هایی از صفحه که رئوس همه دو-گوه‌های جداکننده توسط الگوریتم سارا^۱ می‌توانند در آن قرار بگیرند [۱۲].
- (۲) مشخص کردن چهارضلعی که رأس P در آن قرار می‌گیرد در صورت وجود و گرنه الگوریتم با جواب تهی خاتمه می‌یابد.
- (۳) بررسی قابل رسم بودن دو-گوه با زاویه \ominus .
- (۳-۱) پیدا کردن دو-گوه با حداقل و حداکثر زاویه (دو-گوه جداکننده با زاویه \ominus در صورتی قابل رسم است که زاویه \ominus در بازه زاویه دو-گوه با حداقل و حداکثر زاویه قرار بگیرد).
- (a) یا یکی از دو-گوه‌ها با رأس گوشه‌های چهارضلعی است یا با حرکت دادن رأس هر یک از دو-گوه‌ها (در گوشه‌های چهارضلعی) روی محیط چهارضلعی به دست می‌آید. با این روش یک بازه زاویه برای هر گوشه داریم.
- (۴) به دست آوردن نواحی نشدنی برای قرارگیری رأس دو-گوه‌ها با زاویه \ominus .

(۴-۱) به دست آوردن کمان رئوس دو-گوه‌های مماس محیطی برای هر گوشه از چهارضلعی که باید داخل ناحیه مربوط به مکان هندسی تمام دو-گوه‌های مماس محیطی‌ای که زاویه آنها بین بازه مشخص شده برای CH ‌های مربوط به آنها است قرار بگیرند در صورت وجود.

(۴-۲) به دست آوردن کمان رئوس دو-گوه‌های مماس محیطی محاطی برای گوشه‌هایی که دو-گوه مماس محیطی ندارند.
(a) مشخص کردن رئوسی که در رسم کمان دخیل هستند و ناحیه‌های مربوط به هر کدام.

(۵) رسم دو-گوه با زاویه \ominus در ناحیه شدنی.
(۵-۱) ناحیه‌بندی کلیه کمان‌ها برای جدا کردن قسمت‌هایی از هر کمان که متوازی‌الاضلاع‌های آن با نظم مشخصی تغییر می‌کنند.
(۵-۲) مشخص کردن محدوده تغییر متوازی‌الاضلاع‌های هر ناحیه از کمان.

(۵-۳) اگر بخشی از ناحیه مجاز چهارضلعی پوشش داده نشده بود، بررسی می‌کنیم که کدام کمان‌ها (یا ناحیه از کمان‌ها) در قسمت پوشش داده نشده قرار گرفته‌اند. ناحیه متوازی‌الاضلاع آنها را فقط در قسمت پوشش داده نشده به دست می‌آوریم یعنی خط انتهایی را تا قبل از این که وارد ناحیه پوشش داده شده بشود در نظر می‌گیریم و این کار را تا زمانی که کل ناحیه چهارضلعی توسط محدوده متوازی‌الاضلاع پوشش داده شود تکرار می‌کنیم (حداکثر چهار بار به تعداد کمان‌های چهار گوشه).



شکل ۱۷: محدوده داخل متوازی‌الاضلاع‌ها.

۲-۳-۳ رسم دو-گوه با زاویه \ominus از یک رأس داده شده

در شکل ۱۷ با توجه به مکان قرارگیری رأس دو-گوه، دو-گوه جداکننده با زاویه \ominus را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

- حالتی که رأس دو-گوه در ناحیه ۱ باشد: در این صورت اطمینان داریم خط مجموعه S دو-گوه با رأس P اگر مماس بر R_1 رسم شود قطعاً کمان را قطع می‌کند. اگر از نقطه تقاطع، خط مجموعه N دو-گوه را مماس بر R_1 رسم کنیم، قطعاً دو-گوهی با زاویه \ominus داریم و اگر این خط را (خط مجموعه N) به طور موازی طوری حرکت دهیم که به نقطه P برسد قطعاً دو-گوهی با زاویه \ominus از رأس P داریم.

- حالتی که رأس دو-گوه در ناحیه ۲ باشد: اگر رأس P در این ناحیه قرار گرفته باشد اطمینان داریم خط مجموعه N دو-گوه با رأس P اگر مماس بر B_1 رسم شود و آن را به طور موازی در جهتی که B_1 قرار ندارد حرکت دهیم، قطعاً کمان R_1 را قطع می‌کند. اگر از نقطه تقاطع، خط مجموعه S دو-گوه را مماس بر R_1 رسم کنیم، قطعاً دو-گوهی با زاویه \ominus داریم و اگر این خط را (خط مجموعه S) به طور موازی طوری حرکت دهیم که به نقطه P برسد قطعاً دو-گوهی با زاویه \ominus از رأس P داریم.

- حالتی که رأس دو-گوه در ناحیه ۳ باشد: مانند ناحیه ۱ است با این تفاوت که در ابتدا خط مجموعه N دو-گوه با رأس P مماس بر R_1 رسم می‌شود.

- حالتی که رأس دو-گوه در ناحیه ۴ باشد: مانند ناحیه ۲ است با این تفاوت که در ابتدا خط مجموعه S دو-گوه با رأس P مماس بر B_1 رسم می‌شود.

- حالتی که رأس دو-گوه در ناحیه ۵ باشد: در این ناحیه باید دو بررسی انجام دهیم چرا که اگر رأس P در این ناحیه قرار بگیرد، یا خط مجموعه N آن بر B_1 مماس است و به روش گفته شده در ناحیه ۲ دو-گوه با زاویه \ominus رسم می‌شود و یا خط مجموعه S آن بر B_1 مماس است و به روش گفته شده در ناحیه ۴ دو-گوه با زاویه \ominus برای آن رسم می‌شود.

- حالتی که رأس دو-گوه در ناحیه ۶ باشد: اگر رأس P در این ناحیه قرار بگیرد (ناحیه اشتراک متوازی‌الاضلاع‌ها) برای رسم دو-گوه، خطی به موازی یکی از اضلاع ناحیه از رأس P رسم می‌کنیم به طور موازی آن را به طرف کمان حرکت می‌دهیم تا کمان را قطع کند و بر R_1 مماس شود و بعد از نقطه تقاطع خط دیگر دو-گوه مماس را رسم می‌کنیم و به طور موازی حرکت

۴- نتیجه‌گیری و کارهای آتی

در این مقاله به حل مسئله یافتن تمام دو-گوه‌های تفکیک‌کننده با زاویه Θ از یک رأس داده‌شده پرداختیم. الگوریتم ارائه‌شده برای حل این مسئله در زمان $O(n \log n)$ کلیه دو-گوه‌های جداکننده با زاویه Θ از یک رأس داده‌شده را گزارش می‌کند.

به عنوان کار آتی می‌توان مسأله زیر را تعریف کرد:

مسئله جداسازی مجموعه نقاط قرمز و آبی با دو مثلث با یک رأس مشترک که دو ضلع آنها که تشکیل‌دهنده رأس مشترک هستند در امتداد یکدیگر قرار بگیرند. همچنین با توجه به این که در زمینه جداسازی با دو مثلث کاری انجام نشده است انواع مسایل جداسازی با دو مثلث نیز می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.

به عنوان یکی دیگر از کارهای آتی می‌توان مسئله جداسازی نقاط رنگی با دو-گوه را مطرح کرد که هدف قراردادن دو-گوه در صفحه به طوری است که نقاط با یک مجموعه رنگ مشخص در دو بخش روبه‌روی هم در دو-گوه قرار بگیرند و از یک یا چند رنگ مشخص دیگر در این دو بخش هیچ نقطه‌ای وجود نداشته باشد.

مراجع

- [1] J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Camb. Univ. Press, 2nd Ed., 1988.
- [2] N. Megiddo, "Linear time algorithm for linear programming in R^3 and related problems," *SIAM J. of Computing*, vol. 12, no. 4, pp. 759-776, Nov. 1983.
- [3] M. E. Houle and G. Toussaint, "Computing the width of a set," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 10, no. 5, pp. 761-765, Sep. 1988.
- [4] J. O'Rourke, A. Aggarwal, S. Maddila, and M. Baldwin, "An optimal algorithm for finding minimal enclosing triangle," *J. of Algorithms*, vol. 7, no. 2, pp. 258-269, Jun. 1986.
- [5] B. K. Bhattacharya and A. Mukhopadhyay, "On the minimum perimeter triangle enclosing a convex polygon," in *Proc. Japanese Conf. on Discrete and Computational Geometry, JCDCG'02*, 2002.
- [6] G. Toussaint, "Solving geometric problems with the rotating calipers," in *Proc. IEEE MELECON*, 8 pp., May 1983.
- [7] S. W. Bae, C. Lee, H. Ahn, S. Choi, and K. Chwa, "Computing minimum-area rectilinear convex hull and L-shape," *Comput. Geom.: Theory and Applications*, vol. 42, no. 9, pp. 903-912, Nov. 2009.
- [8] S. W. Bae, C. Lee, H. Ahn, S. Choi, and K. Chwa, "Maintaining extremal points and its applications to deciding optimal orientations," in *Proc. 18th Int. Symp., Algorithms and Computation: ISAAC'07*, pp. 788-799, Mar. 2007.
- [9] C. Saha and S. Das, "Covering a set of points in a plane using two parallel rectangles," *Inf. Process. Lett.*, vol. 109, no. 16, pp. 907-912, Jun. 2009.
- [10] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning*, Springer-Verlag, Germany, 2001.
- [11] N. Megiddo, "Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problem," *SIAM J. Comput.*, vol. 12, no. 4, pp. 759-776, Nov. 1983.
- [12] C. Seara, *On Geometric Separability*, in Applied Mathematics, Ph.D. Thesis, University of Polit'cnica de Catalunya, 2002.
- [13] E. M. Arkin, D. Garijo, A. Marquez, J. S. B. Mitchell, and C. Seara, "Separability of point sets by k-level linear classification trees," *Int. J. of Computational Geometry & Applications*, vol. 22, no. 2, pp. 143-165, Apr. 2012.
- [14] E. M. Arkin, F. Hurtado, J. S. B. Mitchell, C. Seara, and S. S. Skiena, "Some lower bounds on geometric separability problems," *International J. of Computational Geometry and Applications*, vol. 16, no. 1, pp. 1-26, Dec. 2006.
- [15] F. Hurtado, M. Noy, P. A. Ramos, and C. Seara, "Separating objects in the plane by wedges and strips," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 199, no. 1-2, pp. 109-138, Apr. 2000.
- [16] F. Hurtado, M. Mora, P. A. Ramos, and C. Seara, "Separability by two lines and by nearly-straight polygonal chains," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 144, 1-2, pp. 110-122, Nov. 2004.
- [17] F. Hurtado, M. Mora, P. A. Ramos, and C. Seara, "Two problems on separability with lines and polygonals," in *Proc. 15th European*

(۴-۵) رسم خط‌های مجموعه N و S از ابتدا و انتهای هر ناحیه از کمان‌هایی که محدوده متوازی‌الاضلاع برای آنها به دست آمده است به طور مماس بر CH مربوط به کمان و موازی‌های آنها.

(۵-۵) رسم دو-گوه با زاویه Θ با توجه به این که رأس P در کدام ناحیه قرار گرفته است.

(۶-۵) دوران دو-گوه در جهت و خلاف جهت عقربه‌های ساعت (با استفاده از رسم خط‌های مجموعه N و S از رأس P و رؤس CH ها و به دست آوردن حداقل و حداکثر زاویه) و به دست آوردن زاویه چرخش دو-گوه با زاویه Θ از رأس P و به عبارتی به دست آوردن تمام دو-گوه‌ها با زاویه Θ از رأس P .

۳- مرتبه زمانی الگوریتم

قضیه ۳-۱: گزارش کلیه دو-گوه‌های جداکننده با زاویه Θ به زمان $O(n \log n)$ نیاز دارد.

اثبات: ناحیه‌هایی از صفحه که رؤس همه دو-گوه‌های جداکننده می‌توانند در آن قرار بگیرند توسط الگوریتم ساآرا [۱۲] در زمان $O(n \log n)$ محاسبه می‌شوند که این ناحیه‌ها اجتماع تعداد خطی چهارضلعی بودند.

بعد از آن که مشخص شد رأس داده‌شده در کدام چهارضلعی قرار دارد باید قابل رسم بودن دو-گوه با زاویه Θ را بررسی کنیم که برای این کار نیاز به محاسبه دو-گوه با حداقل و حداکثر زاویه در چهارضلعی مذکور داریم که عمده عملیات این قسمت دوران خطوطی از چهارضلعی بود که مماس بر CH بودند. این عملیات می‌تواند به این صورت انجام شود که از رأسی از CH که یکی از اضلاع چهارضلعی بر آن مماس است به رؤسی از CH که ضلع مذکور چهارضلعی در اثر دوران به روش گفته‌شده به آن مماس می‌شود خطی رسم می‌کنیم (البته رؤسی که شرایط دو-گوه را نقض نکند و به عبارتی رسم خط‌های مجموعه N و S). مشخص است که از بین خطوط رسم‌شده خطی که بیشترین زاویه با افق را تشکیل بدهد زودتر تشکیل شده که این عملیات به $O(n)$ زمان نیاز دارد.

بعد از بررسی قابل رسم بودن دو-گوه باید نواحی شدنی و نشدنی برای رسم دو-گوه Θ مشخص شوند که برای مشخص کردن این نواحی با استفاده از دو-گوه‌های مماس محیطی نیاز به خط سیر τ داریم که در زمان $O(n \log n)$ محاسبه می‌شود. برای مشخص کردن نواحی مذکور با استفاده از دو-گوه‌های مماس محاطی نیاز به عملیاتی مشابه عملیات گفته‌شده در قابل رسم بودن دو-گوه می‌باشد که مرتبه زمانی آن $O(n)$ است.

بعد از آن باید ناحیه‌بندی کمان‌ها انجام شود که عمده عملیات حرکت موازی خطوط چهارضلعی است که با به دست آوردن فاصله عمودی رؤس CH های زیر خط و محاسبه کوچک‌ترین فاصله عمودی انجام می‌شود که به $O(n)$ زمان نیاز دارد.

محاسبه محدوده Q و رسم دو-گوه Θ نیز به عملیاتی مشابه عملیات قابل رسم بودن دو-گوه نیاز دارد و بنابراین در زمان $O(n)$ انجام می‌شود، پس کل الگوریتم در زمان $O(n + n \log n)$ انجام می‌شود و در نتیجه پیچیدگی زمانی الگوریتم $O(n \log n)$ است.

با توجه به این که برای اجرای الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله ابتدا نیاز به اجرای الگوریتم ارائه‌شده در [۱۲] با زمان بهینه $O(n \log n)$ می‌باشد بنابراین پیچیدگی زمانی الگوریتم مقاله نیز بهینه است.

مریم ملکی شهرکی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر گرایش نرم افزار به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۹ و ۱۳۹۳ در دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال به پایان رسانیده است و هم اکنون برنامه‌نویس جاوا در حوزه نرم‌افزارهای بانکی در شرکت توسن می‌باشد. نام‌برده قبل از پیوستن به توسن در سال‌های ۱۳۹۲ تا ۱۳۹۴ مربی دانشگاه‌های آزاد اسلامی واحد بوئین زهرا و تهران جنوب بوده است. زمینه‌های مورد علاقه ایشان عبارتند از: هندسه محاسباتی، الگوریتم‌های گراف، کلان داده.

علیرضا باقری تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر گرایش نرم‌افزار به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۱ و ۱۳۷۵ در دانشگاه صنعتی شریف به پایان رسانیده و در مقطع دکتری کامپیوتر از دانشگاه صنعتی امیرکبیر فارغ‌التحصیل شده است. ایشان اکنون به عنوان استادیار در دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر مشغول به کار است. زمینه‌های مورد علاقه ایشان عبارتند از: هندسه محاسباتی، الگوریتم‌های گراف، تحلیل شبکه‌های اجتماعی و کلان داده.

مهديس نیری تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر گرایش نرم‌افزار به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۹ و ۱۳۹۳ در دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال به پایان رسانیده است و هم‌اکنون برنامه‌نویس جاوا در حوزه نرم‌افزارهای بانکی در شرکت توسن می‌باشد. نام‌برده قبل از پیوستن به توسن در سال ۱۳۹۳ مربی دانشگاه آزاد اسلامی واحد بوئین زهرا بوده است. زمینه‌های مورد علاقه ایشان عبارتند از: هندسه محاسباتی، الگوریتم‌های گراف، کلان داده.

Workshop on Computational Geometry, pp. 33-35, Nice, France, Feb. 1999.

- [18] J. S. B. Mitchell, *Approximation Algorithms for Geometric Separating Problems*, Technical Report, State University of New York at Stony Brook, 1993.
- [19] J. O'Rourke, S. R. Kosaraju, and N. Megiddo, "Computing circular separability," *Discrete Comput. Geom.*, vol. 1, no. 2, pp. 105-113, Jun. 1986.
- [20] F. Sheikhi, A. Mohades, and M. Davoodi, "An improved algorithm for finding monochromatic L-shapes in bichromatic point sets," in *Proc. of the Contemporary Issues in Computer and Information Sciences*, pp. 36-39, Zanjan, Iran, Jan. 2011.
- [21] M. V. Kreveld, T. V. Lankveld, and R. Veltkamp, "Identifying well-covered minimal bounding rectangles in 2D point data," in *Proc. 25th Eur. Workshop on Comput. Geom.*, pp. 277-280, Belgium, Brussels, Mar. 2009.
- [۲۲] ز. مصلحی، تفکیک‌پذیری نقاط با اشیای هندسی در فضای دوبعدی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه امیرکبیر، ۱۳۹۱.
- [۲۳] ز. مصلحی و ع. ر. باقری، "تفکیک‌پذیری سری نقاط دو رنگ با دو مستطیل مجزا و موازی محورهای مختصات"، *مجله علمی-پژوهشی رایانش نرم و فناوری اطلاعات*، جلد ۱، شماره ۲، صص. ۴۲-۴۵، ۱۳۹۱.
- [24] J. L. Bentley and T. A. Ottmann, "Algorithms for reporting and counting geometric intersections," *IEEE Trans. on Computers*, vol. 28, no. 9, pp. 643-647, Sept. 1979.
- [25] B. Chazelle and H. Edelsbrunner, "An optimal algorithm for intersecting line segments," *J. of the ACM*, vol. 39, no. 1, pp. 1-54, Jan. 1992.