

سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از روش مبتنی بر بلوک بهبودیافته

کوروش مرجوعی، محبوبه هوشمند، مرتضی صاحب‌الزمانی و مهدی صدیقی

اصل برهم‌نهی^۲ و درهم‌تنیدگی^۳ هستند که موجب مزیت آنها نسبت به کامپیوترهای کلاسیک می‌شود. مثلاً تجزیه اعداد بزرگ به عوامل اول [۴] و جستجوی پایگاه داده [۵] بر روی کامپیوترهای کوانتومی در مقایسه با کامپیوترهای کلاسیک بسیار سریع‌تر اجرا می‌گردند.

از جمله زمینه‌های مرتبط با محاسبات کوانتومی می‌توان به بحث سنتز مدارهای کوانتومی^۵ اشاره کرد. هر ماتریس یکانی^۶ نمایش‌دهنده یک گیت کوانتومی است و سنتز مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی به تعدادی گیت شناخته‌شده (با توجه به کتابخانه گیت‌های جامع) با قابلیت پیاده‌سازی در تکنولوژی‌های کوانتومی اطلاق می‌شود. یکی از متداول‌ترین کتابخانه‌های گیت‌های جامع، کتابخانه گیت‌های پایه^۷ است که از گیت CNOT و کلیه گیت‌های تک‌کیوبیتی تشکیل شده است. به منظور ارزیابی یک مدار کوانتومی، معیارهای هزینه مختلفی مانند تعداد گیت‌های CNOT و تک‌کیوبیتی، هزینه کوانتومی و عمق مدار وجود دارد. مشابه با مسأله سنتز در محاسبات کلاسیک، مسأله سنتز و بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی نیز یک مسأله سخت است [۱].

در تحقیقات پیشین در زمینه سنتز مدارهای کوانتومی، تمرکز بر روی کاهش بدترین حالت تعداد گیت‌ها^۸ (به طور عمده گیت‌های CNOT) است. در این زمینه در [۶] نشان داده شد که تعداد گیت‌های CNOT که برای ساخت هر ماتریس دلخواه بر روی n کیوبیت مورد نیاز است از مرتبه $O(n^2 4^n)$ است. در [۷] نشان داده شد که اعمال تجزیه QR در جبر خطی برای سنتز گیت‌های کوانتومی به این مرتبه از گیت‌های CNOT می‌انجامد. سپس در [۸] بیشترین مقدار حد پایین مرزی^۹ برای تعداد CNOTها در سنتز مدارهای کوانتومی برابر $[(1/4)(4^n - 3n - 1)]$ محاسبه شد. با مشخص‌شدن این حد مرزی امکان محاسبه فاصله مقادیر محاسبه‌شده در روش‌های معرفی‌شده تا حالت بهینه شناخته‌شده تا کنون (یعنی سنتز با کمترین تعداد CNOT) میسر شد. پس از آن روش سنتزی مبتنی بر روش تجزیه شناخته‌شده^{۱۰} CS در جبر خطی با نام CSD در [۹] معرفی شد که تعداد CNOTها را به مقدار $4^n - 2^{n+1}$ رساند. در ادامه با معرفی گیت‌های به طور یکنواخت کنترلی و روش تجزیه مرتبط با آنها، روش موجود در [۹] بهبود یافته و تعداد CNOTها در [۱۰] به $2 - (1/2)2^n - (1/2)4^n$ رسید. مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های سنتز مدارهای کوانتومی این است که تعداد گیت‌های تک‌کیوبیتی کمتری تولید می‌کند. بهترین تعداد CNOT در سنتز مدارهای کوانتومی تا کنون در [۱۱] گزارش شده است که در آن روش

چکیده: سنتز مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت داده‌شده کوانتومی به مجموعه‌ای از گیت‌ها با قابلیت پیاده‌سازی در تکنولوژی‌های کوانتومی اطلاق می‌شود. در تحقیقات پیشین، روشی با عنوان BQD برای سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از ترکیبی از دو روش مشهور سنتز مدارهای کوانتومی با نام CSD و QSD معرفی شده است. در این مقاله، یک روش بهبودیافته با تغییر BQD با نام IBQD معرفی می‌شود. روش IBQD یک روش پارامتری است و در مقایسه با روش‌های سنتز CSD، QSD و BQD فضای جستجوی بزرگ‌تری را برای یافتن بهترین جواب از لحاظ معیارهای مختلف سنتز مداری جستجو می‌کند. توابع هزینه روش IBQD از لحاظ معیارهای مختلف سنتز بر حسب پارامترهای روش پیشنهادی محاسبه و به منظور یافتن جواب‌های بهینه با توجه به این توابع هزینه، مسأله سنتز IBQD به صورت مدل بهینه‌سازی مقید تعریف می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، کمترین هزینه کوانتومی را برای حالت خاص سنتز چهار کیوبیتی در بین سایر روش‌ها به دست می‌آورد. همچنین برای اولین بار هزینه عمق مداری برای روش‌های سنتز CSD، QSD، BQD و روش پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج نشان می‌دهد که IBQD موازنه‌ای را بین هزینه کوانتومی و عمق مداری در مدارهای کوانتومی سنتز شده برقرار می‌کند.

کلیدواژه: محاسبات کوانتومی، مدارهای کوانتومی، سنتز منطقی، بهینه‌سازی، بهینه‌سازی مقید.

۱- مقدمه

در طول ۵۰ سال گذشته، روند شگفت‌انگیز کوچک‌سازی^۱ در صنعت کامپیوتر پدیدار شده است. در حالی که یک ریزپردازنده در سال ۱۹۷۱ تقریباً شامل ۲۳۰۰ ترانزیستور بود، امروزه ریزپردازنده‌ای در همان اندازه، دربرگیرنده بیش از صدها میلیون ترانزیستور است. اگر این روند ادامه داشته باشد تا سال ۲۰۲۰، ابعاد اجزای مدارهای مجتمع به حدود چند اتم می‌رسد. با رسیدن به چنین اندازه‌ای، نظریه ریاضیات حاکم بر علم کامپیوتر نوین نقض می‌شود. بدین منظور دانشمندان نظریه جدیدی تحت عنوان محاسبات کوانتومی^۲ بیان نمودند که به رفتار ذرات در لایه‌های اتمی و زیراتمی می‌پردازد و مجموعه‌ای از سه علم نظریه اطلاعات، علوم کامپیوتر و فیزیک کوانتوم است [۱] تا [۳].

کامپیوترهای کوانتومی مبتنی بر پدیده‌های مکانیک کوانتومی همچون

این مقاله در تاریخ ۱۲ اسفند ماه ۱۳۹۳ دریافت و در تاریخ ۷ آبان ماه ۱۳۹۴ بازنگری شد.

کوروش مرجوعی، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: k_marjoei@aut.ac.ir).

محبوبه هوشمند، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: houshmand@aut.ac.ir).

مرتضی صاحب‌الزمانی، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: szamani@aut.ac.ir).

مهدی صدیقی، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: msedighi@aut.ac.ir).

1. Miniaturization
2. Quantum Computing

3. Superposition
4. Entanglement
5. Quantum-Logic Synthesis
6. Unitary Matrix
7. Basic Gate Library
8. Worst-Case Number of Gates
9. Highest Lower Bound
10. Cosine-Sine Decomposition

و مختصر بر روی سه روش مختلف سنتز که در ادامه این مقاله به کار می‌روند، ارائه می‌شود.

۲-۱ حالت‌های کوانتومی

همانند بیت‌ها در پردازش کلاسیک که واحدهای بنیادی اطلاعات می‌باشند، بیت‌های کوانتومی یا کیوبیت‌ها (Qubits) نیز کوچک‌ترین واحدهای اطلاعات در پردازش اطلاعات کوانتومی هستند. یک کیوبیت یک بردار یکه در فضای هیلبرت دو بعدی است که برای این فضا بردارهای پایه مشخص که با نماد $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ نمایش داده می‌شوند، انتخاب شده‌اند. بر خلاف بیت‌های کلاسیک، کیوبیت‌ها می‌توانند در هر برهم‌نهی از $|0\rangle$ و $|1\rangle$ همانند $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ قرار بگیرند که α و β اعداد مختلطی هستند به گونه‌ای که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

۲-۲ گیت‌ها و مدارهای کوانتومی

آعمال کوانتومی را می‌توان با شبکه‌ای از گیت‌ها محقق کرد. هر گیت دلخواه کوانتومی که بر روی n کیوبیت عمل می‌کند، یک تبدیل خطی است که با یک ماتریس یکانی $2^n \times 2^n$ بر روی فضای n کیوبیتی تعریف می‌گردد. ماتریس U یکانی است اگر $UU^\dagger = I$ که U^\dagger ترانپوز مزدوج ماتریس U می‌باشد. در این مقاله، ماتریس یکانی عمومی که بر روی n کیوبیت عمل می‌کند، با نماد $U(2^n)$ نمایش داده می‌شود.

اعضای گروه پائولی به ترتیب زیر تعریف می‌شوند

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

دسته‌ای از گیت‌های پر کاربرد تک کیوبیتی، گیت‌های دوران به دور محورهای x ، y و z با زاویه α هستند که به ترتیب به صورت $R_x(\alpha)$ ، $R_y(\alpha)$ و $R_z(\alpha)$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -i \sin \frac{\alpha}{2} \\ -i \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

از جمله گیت‌های تک کیوبیتی پر کاربرد دیگر، گیت‌های هادامارد، H ، فاز، S و T هستند

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

سنتزی مبتنی بر تجزیه CS با عنوان QSD^۱ معرفی شده که تعداد $\frac{4}{3} - (3/2)^n - (23/48)4^n$ گیت CNOT تولید می‌کند.

از آنجا که سیستم‌های کوانتومی بیشتر از محاسبات کلاسیک در معرض خطا هستند، مدارهای کوانتومی تحمل‌پذیر اشکال برای پیاده‌سازی عملی مورد نیاز هستند. بسیاری از کدهای تصحیح خطای کوانتومی [۱۲] تا [۱۵] برای ممکن‌ساختن محاسبات تحمل‌پذیر اشکال ارائه شده‌اند که از گیت‌های کتابخانه حاوی گیت‌های کلیفورد و T استفاده می‌کنند. برخی پژوهش‌های اخیر در حوزه سنتز کوانتومی نیز به سنتز کوانتومی با هدف تحمل‌پذیری اشکال می‌پردازند. در این پژوهش‌ها [۱۶] تا [۱۸]، سنتز مدارات کوانتومی عمدتاً با استفاده از کتابخانه گیت‌های کلیفورد و T صورت می‌گیرند.

روش معرفی شده در [۱۹] با نام BQD^۲ ترکیبی از دو روش CSD و QSD است که در نهایت منجر به ارائه روش جدیدی با خصوصیات جدید و ترکیبی از خواص دو روش نام برده شده است.

در این مقاله، روش جدید سنتزی با بهبود روش BQD با نام IBQD^۳ ارائه می‌شود. این روش در مقایسه با روش‌های سنتز CSD، QSD و BQD فضای جستجوی بزرگ‌تری را برای یافتن بهترین جواب از لحاظ معیارهای مختلف سنتز مداری جستجو می‌کند. همچنین تحقیقات پیشین در زمینه سنتز مدارهای کوانتومی تنها به بررسی و ارزیابی معیارهای تعداد گیت‌های CNOT و تک کیوبیتی و هزینه کوانتومی می‌پردازند. بنابراین ارزیابی معیار عمق مدار در روش‌های سنتز CSD، QSD، BQD و روش سنتز پیشنهادی IBQD برای اولین بار در این مقاله مطرح می‌شود.

به منظور سنتز یک ماتریس یکانی اولیه در روش IBQD، ابتدا سنتز QSD به طور بازگشتی تا یک سطح پارامتری تجزیه اجرا شده و سپس هر یک از ماتریس‌های یکانی باقیمانده در روند الگوریتم بازگشتی سنتز با بلوک‌هایی که با استفاده از هر کدام از روش‌های CSD و یا QSD سنتز شده و بهینه‌سازی‌هایی که در این بلوک‌ها لحاظ شده‌اند، جایگزین می‌شوند.

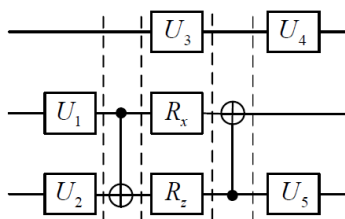
روش IBQD، یک روش پارامتری و به منظور سنتز یک گیت کوانتومی n کیوبیتی، تابعی از سه پارامتر مختلف است. توابع هزینه روش IBQD از لحاظ معیارهای مختلف سنتز بر حسب این سه پارامتر محاسبه و به منظور یافتن جواب‌های بهینه با توجه به این توابع هزینه، مسأله سنتز IBQD به صورت مدل بهینه‌سازی مقید تعریف می‌شود. سپس با حل مسایل بهینه‌سازی برای دو معیار هزینه کوانتومی و عمق، نقاط بهینه برای این دو معیار به دست می‌آیند.

ساختار این مقاله در ادامه می‌آید: در بخش ۲ مفاهیم اولیه مورد نیاز جهت درک بهتر از مطالب بیان شده در بخش‌های آتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش ۳ به ارائه روش پیشنهادی می‌پردازد. نتایج در بخش ۴ آمده است. در پایان نیز در بخش ۵، جمع‌بندی از مطالب مطرح شده در این مقاله خواهد شد.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش، ابتدا به تعریف مفاهیم بنیادی در مورد حالت‌های کوانتومی، گیت‌های کوانتومی و معیارهای هزینه مدار کوانتومی می‌پردازیم. در ادامه مسأله بهینه‌سازی مقید معرفی و در انتها مروری کلی

1. Quantum Shannon Decomposition
2. Block-Based Quantum Decomposition
3. Improved-BQD



شکل ۳: یک مدار کوانتومی نمونه سه کیوبیتی. هر $U_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ یک گیت تک کیوبیتی دلخواه را مشخص می کند و سطوح منطقی این مدار با خطچین از یکدیگر جدا شده اند.

به منظور ارزیابی یک مدار کوانتومی سنتز شده با استفاده از کتابخانه گیت های پایه، معیارهای هزینه مختلفی مانند تعداد گیت های CNOT و تک کیوبیتی، هزینه کوانتومی و عمق مدار وجود دارد. معیار هزینه کوانتومی به منظور محاسبه هزینه پیاده سازی مدارهای کوانتومی به کار می رود. به طور دقیق تر، هزینه کوانتومی به صورت تعداد گیت های ابتدایی کوانتومی برای تولید یک گیت دلخواه کوانتومی تعریف می شود [۲۰]. مقدار هزینه کوانتومی برای یک مدار کوانتومی، برابر با جمع هزینه کوانتومی برای تک تک گیت های کوانتومی در آن مدار است. از طرفی هزینه کوانتومی گیت های CNOT و تک کیوبیتی طبق داده های [۲۱] برابر یک در نظر گرفته شده است، لذا معیار هزینه کوانتومی برای مدار کوانتومی شامل تنها گیت های CNOT و تک کیوبیتی، برابر با تعداد کل گیت های این مدار و تعیین کننده مساحت^۶ در مدارهای کوانتومی است.

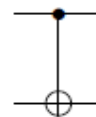
معیار مهم دیگر در ارزیابی مدارهای کوانتومی، عمق مدار است که مشخص کننده زمان اجرای یک مدار است. در مدارهای کوانتومی، برخی گیت ها می توانند هم زمان اجرا شده و یک سطح منطقی^۷ را تشکیل دهند. عمق یک مدار کوانتومی برابر با تعداد سطوح منطقی در آن مدار است [۲۲]. سطوح منطقی در شکل ۳ با خطچین از یکدیگر جدا شده اند. عمق این مدار، برابر با تعداد سطوح منطقی آن و برابر با پنج محاسبه می شود. کاهش عمق یک مدار زمان اجرای مدار را کاهش می دهد و به علت مفهوم ناهمدوسی^۸ کیوبیت ها حایز اهمیت است. از آنجایی که کیوبیت ها در طول زمان وضعیت خود را به علت ناهمدوسی از دست می دهند، کاهش زمان اجرای یک مدار می تواند نقش مؤثری در قابلیت اطمینان^۹ مدار داشته باشد.

۳-۲ مسأله بهینه سازی مقید

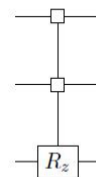
به طور کلی، یک مسأله بهینه سازی مقید به صورت زیر قابل توصیف است [۲۳]

$$\begin{aligned} \min & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} & g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, \dots, k \\ & x_1 \in D_1, \dots, x_n \in D_n \end{aligned}$$

طبق این تعریف، یک مسأله بهینه سازی مقید دارای مجموعه ای از متغیرها (x_1, \dots, x_n) است که به عنوان متغیرهای بهینه سازی^{۱۰} شناخته می شوند.



شکل ۱: نمایش گیت کوانتومی CNOT.



شکل ۲: گیت R_z مالتی پلکس شده بر روی سه کیوبیت با دو کیوبیت انتخاب.

گیت^۱ CNOT بر روی دو کیوبیت (کیوبیت کنترل^۲ و کیوبیت هدف^۳) عمل می کند. در صورتی که کیوبیت کنترل برابر $|1\rangle$ باشد، CNOT، کیوبیت هدف را معکوس می کند و اگر کیوبیت کنترل $|0\rangle$ باشد، خروجی کیوبیت هدف بدون تغییر باقی می ماند. شکل ۱ نمایشی از گیت CNOT را در مدارهای کوانتومی نشان می دهد. در این شکل، کیوبیت اول و دوم به ترتیب کیوبیت کنترل و هدف هستند. لازم به ذکر است در یک مدار کوانتومی، کیوبیت ها از بالا به پایین شماره گذاری می شوند.

به مجموعه گیت های Z ، CNOT، هادامارد و فاز، گیت های کلیفورد گفته می شود.

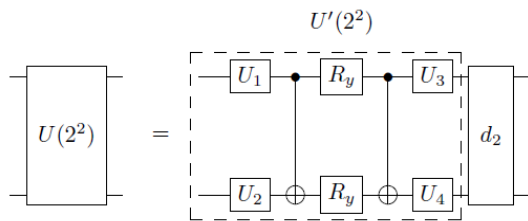
یک مالتی پلکس کوانتومی [۱۱] با n کیوبیت که با نام گیت های به طور یکنواخت کنترلی چند کیوبیتی^۴ نیز در [۱۰] شناخته می شوند، دارای m کیوبیت هدف و $s = n - m$ کیوبیت انتخاب است و 3^s ترکیب مختلف خطوط انتخاب، مشخص می کنند که چه گیت کوانتومی متفاوتی به خطوط هدف اعمال شود. در حالتی که تنها یک کیوبیت هدف (با نام t) داریم و گیت های کوانتومی اعمال شده در خط هدف R_p, t ($p \in \{x, y, z\}$) باشند، مالتی پلکس کوانتومی، R_p مالتی پلکس شده نامیده شده و در [۱۰] با عنوان دوران های به طور یکنواخت کنترلی^۵ خوانده می شود. یک خط انتخاب در یک مالتی پلکس کوانتومی همان گونه که در [۱۱] استفاده شده است با \square نمایش داده می شود. نمونه ای از یک گیت R_z مالتی پلکس شده با دو کیوبیت انتخاب در شکل ۲ مشخص شده است. اولین و دومین کیوبیت، کیوبیت های انتخاب و سومین کیوبیت کیوبیت هدف است.

یک ماتریس مربعی، قطری نامیده می شود چنانچه درایه های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. یک گیت قطری که بر روی n کیوبیت اعمال می شود یک ماتریس یکانی $2^n \times 2^n$ قطری دارد و با نماد Δ_n نمایش داده می شود. در این مقاله، گیت قطری دو کیوبیتی حاصل از سنتز با روش QSD به صورت d_7 نمایش داده می شود.

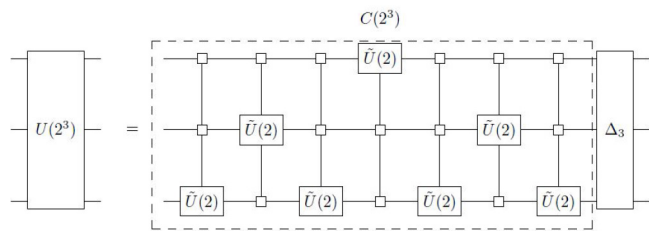
مدار کوانتومی از مجموعه ای از گیت های کوانتومی تشکیل شده که بر روی کیوبیت های ورودی مدار عمل می کند. شکل ۳ مثالی را از یک مدار کوانتومی سه کیوبیتی با گیت های کوانتومی CNOT، R_x ، R_z و U_i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) نمایش می دهد. در این مقاله، گیت های تک کیوبیتی دلخواه با نماد U_i در مدارهای کوانتومی نمایش داده می شود.

6. Area
7. Logic Level
8. Decoherence Time
9. Reliability
10. Optimization Variables

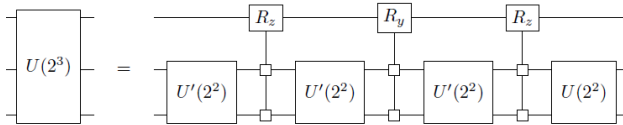
1. Controlled-NOT
2. Control Qubit
3. Target Qubit
4. Uniformly-Controlled Multi-Qubit Gate
5. Uniformly-Controlled Rotation



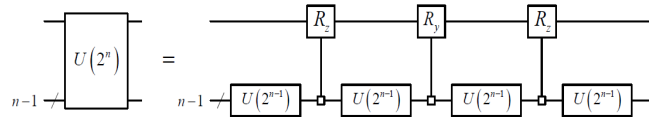
شکل ۶: اعمال تجزیه QSD بر روی گیت کوانتومی دلخواه n کیوبیتی.



شکل ۴: مدار حاصل از سنتز سه کیوبیتی با روش CSD.



شکل ۷: مدار حاصل از سنتز سه کیوبیتی با روش QSD.



شکل ۵: اعمال تجزیه QSD بر روی گیت کوانتومی دلخواه n کیوبیتی.

در انتها با اعمال بهینه‌سازی بر روی گیت‌های دو کیوبیتی موجود (به غیر از سمت راست‌ترین گیت)، گیت‌های قطری d_p که در گیت‌های دو کیوبیتی تولید می‌شوند، حذف می‌شوند. بهینه‌سازی فوق بر اساس این واقعیت است که می‌توان گیت قطری d_p را از خطوط کنترلی گیت‌های R_p مالتی‌پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) عبور داده و با گیت دو کیوبیتی مجاور ادغام نمود. به عنوان مثال شکل ۷ نتیجه حاصل از سنتز یک گیت کوانتومی دلخواه سه کیوبیتی را با روش QSD نشان می‌دهد. در این شکل، گیت‌های دو کیوبیتی که بهینه‌سازی بر روی آنها اجرا شده است با نماد $U'(2^2)$ نمایش داده می‌شوند. گیت‌های R_p مالتی‌پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) حاصل از هر گام بازگشتی، قابل تجزیه به گیت‌های CNOT و تک کیوبیتی هستند.

با ترکیب دو روش QSD و CSD در [۱۹]، روش جدیدی به نام BQD ارائه شده که موازنه‌ای^۳ را بین تعداد گیت‌های CNOT و تعداد گیت‌های تک کیوبیتی فراهم می‌کند. در این روش، ابتدا سنتز بازگشتی QSD برای سنتز ماتریس $U(2^n)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، سپس در ادامه با تعیین سطح تجزیه l ($l \geq 3$)، سنتز QSD متوقف شده و ماتریس‌های باقیمانده در روند الگوریتم بازگشتی سنتز با استفاده از روش CSD سنتز شده و بهینه‌سازی‌هایی که در روند سنتز لحاظ شده‌اند، جایگزین می‌شوند. بهینه‌سازی‌های اعمال شده بدین ترتیب هستند که می‌توان گیت‌های قطری Δ_l را که در ماتریس‌های یکانی l کیوبیتی سنتز شده به روش CSD تولید می‌شوند از خطوط کنترلی گیت‌های R_p مالتی‌پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) عبور داده و با ماتریس‌های مجاور ادغام نمود. در [۱۹] مدار حاصل از سنتز یک ماتریس یکانی l کیوبیتی به روش CSD که گیت قطری Δ_l از آن مدار حذف شده است با نام بلوک پایه l کیوبیتی بیان شده است. در این مقاله، یک بلوک پایه l کیوبیتی با نماد $C(2^l)$ مشخص می‌شود. به طور مثال در شکل ۴، بلوک پایه سه کیوبیتی به صورت $C(2^3)$ مشخص شده است. شکل ۸ نتیجه حاصل از سنتز گیت دلخواه پنج کیوبیتی را با روش BQD با فرض سطح تجزیه $l = 3$ نشان می‌دهد. در شکل ۸ هر یک از بلوک‌های پایه سه کیوبیتی با C نمایش داده می‌شوند.

۳- روش پیشنهادی

در این بخش، یک روش بهبودیافته برای سنتز مدارهای کوانتومی با تغییر روش BQD با عنوان IBQD ارائه می‌شود.

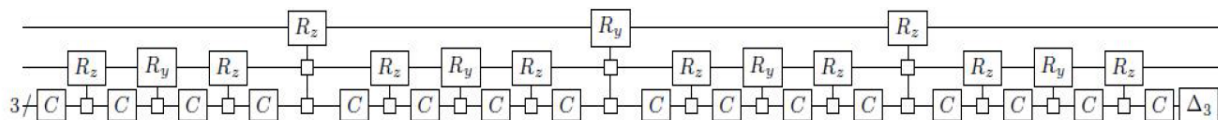
تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ با نام تابع هدف^۱ بر روی متغیرهای بهینه‌سازی اعمال می‌شود و این تابع بایستی کمینه گردد. همچنین مجموعه‌ای از قیدها می‌توانند به صورت تساوی (به صورت $h_j(x_1, \dots, x_n) = 0$) و یا نامساوی (به صورت $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0$) بر روی متغیرهای بهینه‌سازی اعمال شوند. مجموعه‌های D_1, \dots, D_n به ترتیب به عنوان دامنه‌های متغیرهای x_1, \dots, x_n هستند که می‌توانند به عنوان قیود دامنه‌ای (یا محدودیت^۲) در مسأله بهینه‌سازی مقید بیان شوند. این نکته لازم است عنوان شود که محدودیت را می‌توان در برخی موارد به صورت قیدهای تساوی و یا نامساوی نیز بیان کرد. به عنوان مثال، محدودیت نامنفی بودن متغیر x_i را می‌توان به صورت قید نامساوی $-x_i \leq 0$ نوشت.

۲- روش‌های سنتز CSD، QSD و BQD

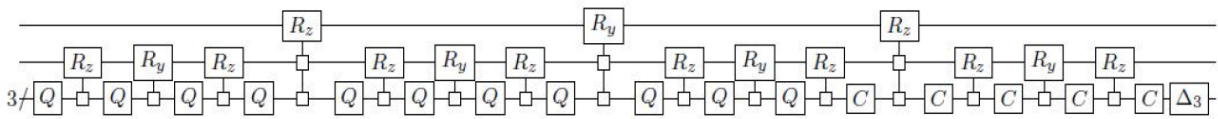
روش‌های سنتز CSD، QSD و BQD مبتنی بر تجزیه CS هستند. روش‌های CSD و QSD به ترتیب بهترین تعداد گیت‌های تک کیوبیتی و CNOT را در مقایسه با سایر روش‌های سنتز مدارهای کوانتومی تولید می‌کنند. روش سنتز CSD یک روش بازگشتی است که به صورت بازگشتی بر روی گیت‌های به طور یکنواخت کنترلی چند کیوبیتی اعمال می‌شود. در نهایت، حاصل تجزیه گیت کوانتومی دلخواه n کیوبیتی به صورت مداری با $2^n - 1$ گیت به طور یکنواخت کنترلی تک کیوبیتی و یک گیت قطری Δ_n است. سپس این نوع گیت‌ها به گیت‌های CNOT و تک کیوبیتی همانند آنچه که در [۱۰] بیان شده است، تجزیه می‌شوند. مثالی از سنتز یک گیت کوانتومی دلخواه سه کیوبیتی با روش CSD در شکل ۴ نشان داده شده است. نماد $\tilde{U}(2)$ در شکل به منظور نمایش گیت‌های هدف در گیت‌های به طور یکنواخت کنترلی تک کیوبیتی به کار رفته است.

یکی دیگر از روش‌های سنتز بازگشتی، روش سنتز QSD است. این روش بر خلاف روش CSD در اولین گام بازگشتی، یک گیت کوانتومی دلخواه n کیوبیتی را به چهار گیت کوانتومی $n-1$ کیوبیتی و سه گیت مالتی‌پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) مطابق شکل ۵ تجزیه می‌کند. سپس تجزیه QSD به طور بازگشتی بر روی چهار گیت کوانتومی $n-1$ کیوبیتی ادامه می‌یابد تا در نهایت گیت‌های دو کیوبیتی حاصل شوند. سپس هر گیت دو کیوبیتی توسط مدار بهینه به دست آمده در [۲۴] مطابق شکل ۶ جایگزین می‌شود.

1. Object Function
2. Restriction



شکل ۸: مدار حاصل از سنتز پنج کیوبیتی با روش BQD با فرض سطح تجزیه ۳.



شکل ۹: مدار حاصل از سنتز یک گیت دلخواه پنج کیوبیتی با روش IBQD به طوری که $l=3, k=1, m=11$.

با انتخاب مقادیر خاص برای پارامترهای l, k و m برای سنتز ماتریس یکانی دلخواه n کیوبیتی، نتایج تولیدشده از روش IBQD مشابه با نتایج به دست آمده از روش‌های CSD، QSD و BQD است. جدول ۱ این مقادیر خاص را برای پارامترهای l, k و m نشان می‌دهد.

۲-۳ معیارهای هزینه سنتز

در این زیربخش، معیارهای هزینه ارزیابی مدارهای کوانتومی با استفاده از روش پیشنهادی مطرح می‌شود.

۱-۲-۳ هزینه تعداد گیت‌های CNOT

برای محاسبه تعداد گیت‌های CNOT در روش IBQD لازم است ابتدا تعداد گیت‌های CNOT برای گیت‌های F_l و NF_l را که به روش CSD و QSD سنتز می‌شوند، به دست آورد. رابطه‌های (۱) و (۲) به ترتیب تعداد گیت‌های CNOT برای گیت F_l (C_{CSD_l}) و گیت NF_l (C'_{CSD_l}) سنتز شده به روش CSD را نشان می‌دهند

$$C_{CSD_l} = (2^l - 1)(2^{l-1} - 1) + 2^l - 3 \quad (1)$$

$$C'_{CSD_l} = (2^l - 1)(2^{l-1} - 1) \quad (2)$$

به طور مشابه، تعداد گیت‌های CNOT برای گیت F_l (C_{QSD_l}) [۱۱] و گیت NF_l (C'_{QSD_l}) سنتز شده به روش QSD به ترتیب از (۳) و (۴) محاسبه می‌شود

$$C_{QSD_l} = \frac{2^3}{48} \times 2^l - \frac{3}{2} \times 2^l + \frac{4}{3} \quad (3)$$

$$C'_{QSD_l} = \frac{2^3}{48} \times 2^l - \frac{3}{2} \times 2^l + \frac{1}{3} \quad (4)$$

اختلاف تعداد گیت‌های CNOT بین (۱) و (۲) برای CSD و این اختلاف بین (۳) و (۴) برای QSD به ترتیب به دلیل تعداد گیت‌های CNOT تولیدشده توسط گیت قطری Δ_l و d_p است.

بنابراین با توجه به (۱)، (۴)، (۵) تعداد گیت‌های CNOT را در مدار کوانتومی n کیوبیتی سنتز شده به روش IBQD برای سطح تجزیه l ($3 \leq l \leq n$)، $k \in \{0, 1\}$ و $0 \leq m \leq 2^{n-l} - 1$ نشان می‌دهد. آخرین جمله در این رابطه، هزینه تعداد گیت‌های CNOT به دست آمده از گیت‌های R_p ماتری پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) موجود در روند سنتز را برای سطح تجزیه l ($l \geq 3$) نشان می‌دهد

$$C_{IBQD_{n,l,k,m}} = (2^{n-l} - 1 - m)[(2^l - 1)(2^{l-1} - 1)] + m[\frac{2^3}{48} \times 2^l - \frac{3}{2} \times 2^l + \frac{1}{3}] + (1-k)[\frac{2^3}{48} \times 2^l - \frac{3}{2} \times 2^l + \frac{4}{3}] \quad (5) + k[(2^l - 1)(2^{l-1} - 1) + 2^l - 3] + \sum_{i=l}^{n-1} (3 \times 2^i - 1) 2^{n-i-1}$$

جدول ۱: حالت‌های خاص روش سنتز IBQD به ازای مقادیر پارامترهای l, k و m .

روش سنتز	مقادیر l, k و m
CSD	$l = n, k = 1, m = 0$
QSD	$3 \leq l \leq n-1, k = 0, m = 2^{n-l} - 1$
	$l = n, k = 0, m = 0$
BQD	$3 \leq l \leq n-1, k = 1, m = 0$

۱-۳ سنتز IBQD

در مرحله بعد با تعیین مقدار m ($0 \leq m \leq 2^{n-l} - 1$)، تعداد گیت‌های NF_l که با روش QSD سنتز می‌شوند، مشخص و مابقی گیت‌های NF_l با روش CSD سنتز می‌شوند. ذکر این نکته لازم است که با تغییر ترتیب گیت NF_l سنتز شده به روش QSD، مدارهای کوانتومی متفاوتی به دست می‌آید. هرچند این مدارها دارای معیارهای هزینه یکسانی بوده و بنابراین تنها پارامتری که بایستی مورد بررسی قرار گیرد، پارامتر m است. همچنین بر حسب مقدار k ($k \in \{0, 1\}$)، آخرین (سمت راست‌ترین) ماتریس یکانی l کیوبیتی با نمایش F_l می‌تواند با روش QSD (به طور قراردادی $k = 0$) و یا با روش CSD (به طور قراردادی $k = 1$) سنتز شود. در نهایت، اعمال بهینه‌سازی‌های موجود در [۱۹] موجب حذف گیت‌های قطری Δ_l که در گیت‌های NF_l سنتز شده به روش CSD به دست آمده، می‌شوند و بلوک‌های پایه l کیوبیتی به دست می‌آیند. به علاوه با به کارگیری بهینه‌سازی ارائه شده در [۱۱]، گیت‌های قطری دو کیوبیتی d_p که در گیت‌های NF_l سنتز شده به روش QSD تولید می‌شوند، حذف می‌گردند.

همان طور که گفته شد، بهینه‌سازی‌های فوق بر اساس این واقعیت است که می‌توان گیت‌های قطری Δ_l و d_p را که به ترتیب در گیت‌های NF_l سنتز شده با CSD و QSD به دست آمده‌اند، از خطوط کنترلی گیت‌های R_p ماتری پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) عبور داده و با ماتریس‌های یکانی مجاور ادغام نمود.

به عنوان مثال، شکل ۹ یک مدار نمونه پنج کیوبیتی ($n = 5$) را که در فضای جواب روش IBQD با فرض سطح تجزیه $l = 3$ و مقادیر $k = 1$ و $m = 11$ تولید شده، نشان می‌دهد. بدین منظور ابتدا سنتز QSD به صورت بازگشتی تا سطح تجزیه $l = 3$ اجرا شده است. در انتهای این مرحله از $2^{5-3} = 4$ ماتریس یکانی سه کیوبیتی موجود، یازده گیت NF_3 با روش QSD ($m = 11$) و مابقی گیت‌های NF_3 با روش CSD به همراه بهینه‌سازی‌هایی که در این گیت‌ها لحاظ شده‌اند، سنتز می‌شوند. همچنین با توجه به مقدار k ($k = 1$)، گیت F_3 با روش CSD سنتز می‌شود. در شکل ۹ هر یک از بلوک‌های پایه سه کیوبیتی ($C(2^3)$) و ماتریس‌های یکانی سه کیوبیتی سنتز شده به روش QSD به همراه بهینه‌سازی‌های اعمال شده به ترتیب با Q و C نمایش داده می‌شوند.

برای محاسبه هزینه کوانتومی (هزینه تعداد کل گیت‌ها) در یک مدار کوانتومی n کیوبیتی سنتز شده به روش IBQD برای سطح تجزیه l ($3 \leq l \leq n$)، $k \in \{0, 1\}$ و $0 \leq m \leq 4^{n-l} - 1$ به دست می‌آید

$$T_{IBQD_{n,l,k,m}} = (1 + \frac{1}{4^l})4^n - 3 \times 2^n + (m+1)(3 \times 4^{l-2} - 2^l) + k(-3 \times 4^{l-2} + 3 \times 2^l - l - 6) + 3 \quad (13)$$

با جایگذاری مقادیر خاص پارامترها با توجه به روش‌های مختلف سنتز (جدول ۱) در (۱۳)، هزینه کوانتومی برای روش‌های CSD، QSD و BQD به ترتیب طبق (۱۴) تا (۱۶) محاسبه می‌شود

$$T_{CSD_n} = 4^n - (n+3) \quad (14)$$

$$T_{QSD_n} = \frac{19}{16} \times 4^n - 3 \times 2^n + 3 \quad (15)$$

$$T_{BQD_{n,l}} = (\frac{1}{4^l} + 1)4^n - 3 \times 2^n + 2^{l+1} - l - 3, \quad n \geq 3 \quad (16)$$

۳-۲-۳ هزینه عمق مدار

تاکنون معیار عمق مدار در روش‌های مختلف سنتز از جمله CSD، QSD و BQD مورد بررسی و ارزیابی قرار نگرفته است. بنابراین در این بخش ابتدا به بررسی و ارزیابی معیار عمق مدار در سه روش سنتز فوق پرداخته و سپس برای روش سنتز IBQD، هزینه عمق مدار را محاسبه می‌کنیم.

به منظور محاسبه عمق مدار n کیوبیتی به دست آمده توسط روش‌های مختلف سنتز، در ابتدا تعداد کل گیت‌های موجود در مدار (T_n) محاسبه می‌شود. عمق مدار کوانتومی n کیوبیتی نشان داده شده با D_n می‌تواند از (۱۷) به دست آید که در آن، P_n تعداد گیت‌های مدار را که می‌توانند به صورت موازی اجرا شوند نشان می‌دهد

$$D_n = T_n - P_n \quad (17)$$

با توجه به (۱۷)، (۱۸) هزینه عمق مدار را برای مدار کوانتومی n کیوبیتی که با روش CSD سنتز می‌شود، نشان می‌دهد

$$D_{CSD_n} = \begin{cases} 4^n - 2^n - (n+2), & n \geq 3 \\ 9, & n = 2 \end{cases} \quad (18)$$

در این رابطه اگر تعداد کیوبیت‌های مدار برابر ۲ باشد، تعداد گیت‌های موازی برابر با ۲ بوده و در غیر این صورت، $2^n - 1$ گیت موازی وجود دارد. همچنین تعداد کل گیت‌های مدار طبق (۱۴) جایگزین شده است.

برای محاسبه عمق مدار در روش QSD لازم است محاسباتی همانند آنچه برای محاسبه عمق مدار در روش CSD انجام شد، صورت پذیرد. هزینه عمق مدار n کیوبیتی به دست آمده از سنتز QSD را می‌توان به صورت (۱۹) نشان داد

$$D_{QSD_n} = (\frac{19}{16} \times 4^n - 3 \times 2^n + 3) - (3 \times 4^{n-2} + \sum_{i=2}^n 2 \times 4^{n-i}) \quad (19)$$

در این رابطه، هزینه تعداد کل گیت‌های مدار طبق (۱۵) جایگزین شده است. آخرین جمله در این رابطه، تعداد گیت‌های موازی را نشان می‌دهد به طوری که مقدار 4^{n-2} ، تعداد گیت‌های دو کیوبیتی در مدار n کیوبیتی مورد نظر است که هر یک دارای سه گیت موازی است. به علاوه، مقدار $\sum_{i=2}^n 2 \times 4^{n-i}$ تعداد گیت‌های موازی به دست آمده از گیت‌های R_p مالتی‌پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) با کیوبیت هدف i ($3 \leq i \leq n$) را محاسبه می‌کند.

با ساده‌سازی‌های لازم در (۵)، (۶) برای محاسبه تعداد گیت‌های CNOT حاصل از سنتز گیت دلخواه n کیوبیتی با روش IBQD بر حسب پارامترهای l ، k و m به دست می‌آید

$$C_{IBQD_{n,l,k,m}} = (\frac{1}{4} + \frac{2}{3 \times 4^l})4^n - 3 \times 2^{n-1} + \frac{1}{3}(k(4^{l-2} + 3 \times 2^l - 1) - m(4^{l-2} + 2) + 2 - 4^{l-2}) \quad (6)$$

۳-۲-۳ هزینه تعداد گیت‌های تک کیوبیتی

برای محاسبه تعداد گیت‌های تک کیوبیتی در روش سنتز پیشنهادی IBQD لازم است محاسباتی همانند آنچه برای CNOT انجام شد، صورت پذیرد. روابط (۷) و (۸) به ترتیب تعداد گیت‌های تک کیوبیتی حاصل از گیت F_l (S_{CSD_l}) و گیت NF_l (S'_{CSD_l}) سنتز شده به روش CSD را نشان می‌دهند

$$S_{CSD_l} = (2^l - 1)2^{l-1} + 2^l - l - 1 \quad (7)$$

$$S'_{CSD_l} = (2^l - 1)2^{l-1} \quad (8)$$

همچنین تعداد گیت‌های تک کیوبیتی در گیت F_l (S_{QSD_l}) و گیت NF_l (S'_{QSD_l}) سنتز شده به روش QSD به ترتیب از (۹) و (۱۰) محاسبه می‌شود

$$S_{QSD_l} = \frac{17}{24} \times 4^l - 3 \times 2^{l-1} + \frac{5}{3} \quad (9)$$

$$S'_{QSD_l} = \frac{17}{24} \times 4^l - 3 \times 2^{l-1} + \frac{2}{3} \quad (10)$$

اختلاف تعداد گیت‌های تک کیوبیتی بین (۷) و (۸) برای CSD و این اختلاف بین (۹) و (۱۰) برای QSD به ترتیب به دلیل تعداد گیت‌های تک کیوبیتی تولید شده توسط گیت قطری Δ_l و d_l است.

بنابراین تعداد گیت‌های تک کیوبیتی در یک مدار کوانتومی n کیوبیتی که با روش IBQD سنتز شده است به صورت (۱۱) بر حسب متغیرهای l ($3 \leq l \leq n$)، $k \in \{0, 1\}$ و $0 \leq m \leq 4^{n-l} - 1$ قابل محاسبه است. آخرین جمله در این رابطه هزینه تعداد گیت‌های تک کیوبیتی به دست آمده از گیت‌های R_p مالتی‌پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) موجود در روند سنتز را برای سطح تجزیه l ($3 \leq l$) نشان می‌دهد

$$S_{IBQD_{n,l,k,m}} = (4^{n-l} - 1 - m)[(2^l - 1)2^{l-1}] + m[\frac{17}{24} \times 4^l - \frac{3}{2} \times 2^l + \frac{2}{3}] + (1-k)[\frac{17}{24} \times 4^l - \frac{3}{2} \times 2^l + \frac{5}{3}] + k[(2^l - 1)2^{l-1} + 2^l - l - 1] + \sum_{i=l}^{n-1} (3 \times 2^i - 2)4^{n-i-1} \quad (11)$$

بعد از ساده‌سازی‌های ممکن در (۱۱)، (۱۲) حاصل می‌شود

$$S_{IBQD_{n,l,k,m}} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4^l} - \frac{2}{3 \times 4^l})4^n - 3 \times 2^{n-1} + \frac{1}{6}k(-5 \times 4^{l-1} + 3 \times 2^{l+2} - 6l - 16) + \frac{1}{6}(m(5 \times 4^{l-1} - 6 \times 2^l + 4) + 5 \times 4^{l-1} - 6 \times 2^l + 14) \quad (12)$$

۳-۲-۳ هزینه کوانتومی

با جمع‌نمودن (۶) و (۱۲) و همچنین اعمال ساده‌سازی‌های لازم، (۱۳)

$$D'_{QSD_l} = D_{QSD_l} - 2 = \frac{2^3}{2^4} \times 4^l - 3 \times 2^l + \frac{5}{3} \quad (24)$$

اختلاف بین هزینه عمق در (۲۰) و (۲۴) (مقدار ۲) به دلیل حذف گیت قطری d_l از گیت NF_l سنتز شده به روش QSD است.

با توجه به (۱۸)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۴)، هزینه عمق در روش IBQD برای تعداد کیوبیت $n \geq 3$ به صورت (۲۵) قابل محاسبه است

$$D_{IBQD_{n,l,k,m}} = (4^{n-l} - 1 - m) \times D'_{CSD_l} + m \times D'_{QSD_l} + (1 - k) \times D_{QSD_l} + k \times D_{CSD_l} + \left(\frac{3}{4^l} - \frac{1}{4^l}\right) 4^n - 3 \times 2^n + 1 - \sum_{i=l+1}^n 2 \times 4^{n-i} \quad (25)$$

بعد از جایگذاری و اعمال ساده‌سازی‌های لازم در (۲۵)، هزینه عمق مدار در روش IBQD به صورت (۲۶) برای سطح تجزیه $3 \leq l \leq n$ ، $k \in \{0, 1\}$ و $0 \leq m \leq 4^{n-l} - 1$ محاسبه می‌شود

$$D_{IBQD_{n,l,k,m}} = \left(1 + \frac{1}{3 \times 4^{l-1}}\right) 4^n - 3 \times 2^n + \frac{1}{6} (-m(4^{l-1} + 8) - 4^{l-1} + 14) + \frac{1}{6} (k(4^{l-1} + 3 \times 2^{l+2} - 6l - 34)) \quad (26)$$

۴- نتایج و تحلیل

همان طور که گفته شد، نتایج به دست آمده در روش سنتز پیشنهادی IBQD به مقادیر پارامترهای l ، k و m بستگی دارد. در این بخش، دو معیار هزینه کوانتومی و هزینه عمق مدار به دست آمده توسط روش سنتز IBQD بررسی شده و به محاسبه مقادیر مطلوب برای پارامترهای سنتز که بهترین نتایج را برای این دو معیار به دست می‌آورند می‌پردازیم. با توجه به (۱۳) برای هزینه کوانتومی به دست آمده در مدارات n کیوبیتی تولید شده در فضای جواب به روش IBQD، مسأله سنتز با هدف یافتن نقاط کمینه برای این هزینه به صورت مدل بهینه‌سازی مقید در (۲۷) قابل بیان است

$$\min \left(1 + \frac{1}{4^l}\right) 4^n - 3 \times 2^n + (m+1)(3 \times 4^{l-2} - 2^l) + k(-3 \times 4^{l-2} + 3 \times 2^l - l - 6) + 3 \quad (27)$$

subject to $3 - l \leq 0$, $l - n + 1 \leq 0$, $m - 4^{n-l} + 1 + 11 \leq 0$, $k \in \{0, 1\}$, $m, l \in W$

به طوری که $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$.

در (۲۷) متغیرهای بهینه‌سازی و تابع هدف که بایستی کمینه گردد به ترتیب پارامترهای سنتز (l, k, m) و (۱۳) می‌باشند و همچنین محدودیت‌های پارامترهای سنتز به صورت قیدهای نامساوی بیان می‌شوند. با توجه به این که پارامتر k تنها می‌تواند مقادیر صفر و یا یک را بپذیرد، قید $k \in \{0, 1\}$ به (۲۷) اضافه می‌گردد. به علاوه با توجه به این که پارامترهای سنتز بایستی اعداد صحیح و نامنفی باشند (اعداد حسابی)، این شرط به صورت قیود دامنه‌ای $(m, l \in W)$ عنوان می‌شود. بنابراین با حل (۲۷)، جدول ۲ نقاط کمینه را برای هزینه کوانتومی در روش سنتز IBQD با n کیوبیت ورودی نشان می‌دهد. همچنین در این جدول، روش سنتز متناظر با نقاط کمینه به دست آمده نیز ذکر شده است. همان طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، در حالت خاص سنتز سه کیوبیتی ($n=3$)، مقادیر پارامترهای روش سنتز IBQD به نحوی به

جدول ۲: نقاط کمینه برای هزینه کوانتومی در روش سنتز IBQD با n کیوبیت ورودی.

روش سنتز متناظر	k	m	l	n
QSD	۰	۰	۳	۳
IBQD	۰	۰	۳	۴
CSD	۱	۰	n	$n \geq 5$

با اعمال ساده‌سازی‌های ممکن در (۱۹)، (۲۰) هزینه عمق مدار n کیوبیتی را برای روش سنتز QSD نشان می‌دهد

$$D_{QSD_n} = \frac{2^3}{2^4} \times 4^n - 3 \times 2^n + \frac{11}{3} \quad (20)$$

همان طور که گفته شد، در روش سنتز BQD برای گیت دلخواه n کیوبیتی، کلیه ماتریس‌های یکانی در سطح تجزیه l (یعنی 4^{n-l}) توسط روش CSD سنتز می‌شوند. همچنین با اعمال بهینه‌سازی‌هایی بر روی این ماتریس‌ها (به غیر از آخرین ماتریس)، گیت‌های قطری Δ_l حذف می‌شوند و در نتیجه به منظور محاسبه هزینه عمق در روش BQD، علاوه بر استفاده از (۱۸) برای هزینه عمق آخرین ماتریس l کیوبیتی سنتز شده به روش CSD، استفاده از (۲۱) برای محاسبه هزینه عمق یک ماتریس غیر پایانی l کیوبیتی سنتز شده به روش CSD (D'_{CSD_l}) لازم است

$$D'_{CSD_l} = (4^l - 2^{l+1} + 1) - (2^l - 2) = 4^l - 3 \times 2^l + 3 \quad (21)$$

در (۲۱)، جمله اول (یعنی $4^l - 2^{l+1} + 1$) تعداد کل گیت‌های به دست آمده از نتیجه سنتز یک ماتریس غیر پایانی l کیوبیتی به روش CSD را محاسبه نموده که با جمع (۲) و (۸) حاصل می‌شود. همچنین مقدار $2 - 2^l$ در این رابطه، تعداد گیت‌های موازی در یک ماتریس غیر پایانی l کیوبیتی سنتز شده به روش CSD را نشان می‌دهد.

در نهایت، هزینه عمق مدار در روش BQD برای مقادیر $n \geq 3$ به صورت (۲۲) قابل محاسبه است که $((3/4^l) - (1/4^l)) 4^n - 3 \times 2^n + 1$ تعداد کل گیت‌های به دست آمده از گیت‌های R_p ماتری پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) موجود در روند سنتز یک گیت دلخواه n کیوبیتی به روش BQD با سطح تجزیه l ($l \geq 3$) را نشان می‌دهد. به علاوه، مقدار $\sum_{i=l+1}^n 2 \times 4^{n-i}$ در این رابطه، تعداد گیت‌های موازی به دست آمده از گیت‌های R_p ماتری پلکس شده ($p \in \{y, z\}$) با کیوبیت هدف i ($3 \leq i \leq n$) را محاسبه می‌کند

$$D_{BQD_{n,l}} = (4^{n-l} - 1) \times D'_{CSD_l} + D_{CSD_l} + \left(\frac{3}{4^l} - \frac{1}{4^l}\right) 4^n - 3 \times 2^n + 1 - \sum_{i=l+1}^n 2 \times 4^{n-i} \quad (22)$$

در نهایت با جایگذاری (۱۸) و (۲۱) به ترتیب در مقادیر D_{CSD_l} و D'_{CSD_l} و اعمال ساده‌سازی‌های لازم، هزینه عمق مدار در روش BQD به صورت (۲۳) برای تعداد کیوبیت $n \geq 3$ و سطح تجزیه $l \geq 3$ محاسبه می‌شود

$$D_{BQD_{n,l}} = \left(1 + \frac{1}{3 \times 4^{l-1}}\right) 4^n - 3 \times 2^n + 2^{l+1} - l - \frac{11}{3}, \quad l \geq 3 \quad (23)$$

برای محاسبه عمق مدار در روش IBQD لازم است محاسباتی همانند آنچه برای محاسبه عمق مدار در روش BQD انجام شد، صورت پذیرد، هرچند لازم است که هزینه عمق گیت‌های NF_l سنتز شده به روش QSD نیز محاسبه گردد. هزینه عمق یک گیت NF_l سنتز شده به روش QSD در (۲۴) بیان شده است

جدول ۳: هزینه کوانتومی در روش های سنتز IBQD، QSD، (خانه های پررنگ)، BQD (خانه های خاکستری کم رنگ) و CSD (خانه های خاکستری) برای مقادیر $3 \leq l \leq 8$ ، $4 \leq n \leq 8$ ، $k=0, 1$. کمترین مقادیر برای هزینه کوانتومی با استفاده از خطوط زیرین مشخص شده است.

k	Decomposition level (l)	Circuit line (n)																			
		۴				۵				۶				۷				۸			
		m				m				m				m				m			
۰	۳	۰	۱	۲	۰	۸	۱۴	۰	۳۲	۶۲	۰	۱۲۸	۲۵۴	۰	۵۱۲	۱۰۲۲					
۰	۴	۲۴۷	۲۵۱	۲۵۵	۱۰۶۳	۱۰۹۵	۱۱۱۹	۴۴۲۳	۴۵۵۱	۴۶۷۱	۱۸۰۵۵	۱۸۵۶۷	۱۹۰۷۱	۷۲۹۶۷	۷۵۰۱۵	۷۷۰۵۵					
۰	۵																				
۰	۶																				
۰	۷																				
۰	۸																				
۱	۳	۰	۱	۲	۰	۸	۱۴	۰	۳۲	۶۲	۰	۱۲۸	۲۵۴	۰	۵۱۲	۱۰۲۲					
۱	۴	۲۵۰	۲۵۴	۲۵۸	۱۰۶۶	۱۰۹۸	۱۱۲۲	۴۴۲۶	۴۵۵۴	۴۶۷۴	۱۸۰۵۸	۱۸۵۷۰	۱۹۰۷۴	۷۲۹۷۰	۷۵۰۱۸	۷۷۰۵۸					
۱	۵																				
۱	۶																				
۱	۷																				
۱	۸																				

به طوری که $n \in \{۳, ۴, ۵, \dots\}$.

بر این اساس مقادیر مطلوب $l=n, k=0, m=0$ به عنوان نقطه کمینه برای هزینه عمق مدار در روش سنتز IBQD با n کیوبیت ورودی به دست آمد. در این شرایط طبق جدول ۱، روش سنتز IBQD معادل روش QSD است.

جدول ۳ و ۴ به ترتیب مقایسه ای از لحاظ هزینه کوانتومی و عمق مدار به دست آمده در روش سنتز IBQD را برای تعداد کیوبیت $4 \leq n \leq 8$ ، سطح تجزیه $3 \leq l \leq 8$ ، $k=0, 1$ و مقادیر مشخصی از m با سایر روش های سنتز n کیوبیتی نشان می دهند. نتایج روش سنتز IBQD به ازای برخی مقادیر خاص پارامترها که در جدول ۱ مشاهده می شود با نتایج تولید شده در روش های سنتز CSD (خانه های خاکستری در جدول های ۳ و ۴)، QSD (خانه های پررنگ) و BQD (خانه های خاکستری کم رنگ) برابر است.

همان طور که در جدول ۳ و ۴ مشاهده می شود، روش سنتز IBQD (به غیر از حالتی که معادل CSD و QSD است) همواره هزینه کوانتومی کمتری نسبت به روش QSD و هزینه عمق مدار کمتری نسبت به روش CSD ایجاد و یک موازنه بین این دو معیار در مدارهای کوانتومی سنتز شده برقرار می کند. همچنین روش IBQD در حالتی که معادل روش BQD نیست، نتایج بهتری از لحاظ هزینه کوانتومی و عمق مدار نسبت

دست آمده اند که روش سنتز QSD را تولید می کنند (جدول ۱). بر این اساس، روش QSD بهترین هزینه کوانتومی را در حالت سه کیوبیتی دارد. هر چند در حالت خاص سنتز چهار کیوبیتی ($n=4$)، هزینه کوانتومی تولید شده توسط روش سنتز IBQD بهترین مقدار به دست آمده نسبت به روش های CSD، QSD و BQD است. برای سایر حالت های سنتز n کیوبیتی ($n \geq 5$)، مقادیر مطلوب l, m و k به دست آمده برای هزینه کوانتومی در روش سنتز IBQD، حالت معادل CSD را تولید می کند. به منظور یافتن نقاط کمینه برای هزینه عمق مدار در روش سنتز IBQD با n کیوبیت ورودی، لازم است همانند آنچه که برای یافتن نقاط کمینه برای هزینه کوانتومی انجام شد، صورت پذیرد. با توجه به (۲۶)، (۲۸) مدل بهینه سازی مفید را برای مسئله سنتز با هدف یافتن نقاط کمینه برای هزینه عمق مدار نشان می دهد.

$$\begin{aligned}
 & \min (1 + \frac{1}{3 \times 4^{l-1}}) 4^n - 3 \times 2^m + \\
 & \frac{1}{6} (-m(4^{l-1} + 8) - 4^{l-1} + 14) + \\
 & \frac{1}{6} (k(4^{l-1} + 3 \times 2^{l+2} - 6l - 34)) \quad (28)
 \end{aligned}$$

subject to $3-l \leq 0$, $l-n+1 \leq 0$, $m-4^{n-l}+1 \leq 0$.
 $k \in \{0,1\}$, $m, l \in W$

کوروش مرجوعی در سال ۱۳۸۹ مدرک کارشناسی مهندسی کامپیوتر خود را از دانشگاه شهید باهنر کرمان و در سال ۱۳۹۲ مدرک کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر خود را از دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران دریافت نمود. نامبرده هم‌اکنون به عنوان کارشناس شبکه در مجتمع صنعتی بارز به کار مشغول می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: محاسبات کوانتومی، سنتز مدارهای کوانتومی، طراحی مدارهای دیجیتال و مدیریت شبکه‌های کامپیوتری.

محبوبه هوشمند تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته مهندسی کامپیوتر به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۶ و ۱۳۸۹ در دانشگاه فردوسی مشهد به پایان رسانده است. نامبرده در سال ۱۳۹۳ مدرک دکترای مهندسی کامپیوتر خود را از دانشگاه صنعتی امیرکبیر دریافت کرده است. دکتر هوشمند هم‌اکنون استادیار گروه کامپیوتر در دانشکده مهندسی دانشگاه آزاد مشهد می‌باشد. از تابستان سال ۱۳۹۵، نامبرده به عنوان محقق پسا دکترا در گروه پژوهشی نظریه اطلاعات کوانتومی در دانشگاه تکنولوژی و طراحی سنگاپور در کشور سنگاپور، به پژوهش مشغول است. زمینه‌های علمی مورد علاقه وی شامل مباحث مختلف نظری در حوزه نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی است.

مرتضی صاحب‌الزمانی در سال ۱۳۶۷ مدرک کارشناسی خود را از دانشگاه صنعتی اصفهان دریافت نمود و تحصیلات خود را به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۰ و ۱۳۷۵ در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی و علوم کامپیوتر در دانشگاه نیوساوت ولز در استرالیا به پایان رساند. دکتر صاحب‌الزمانی از سال ۱۳۷۶ در دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات دانشگاه صنعتی امیرکبیر در تهران مشغول به فعالیت گردید و اکنون نیز عضو هیأت علمی این دانشکده می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه نامبرده عبارتند از: محاسبات کوانتومی، امنیت سیستم‌های سخت‌افزاری دیجیتال، طراحی خودکار سیستم‌های زیستی و سیستم‌های قابل بازیگرایی.

مهدی صدیقی در سال ۱۳۶۹ مدرک کارشناسی مهندسی برق گرایش سخت-افزار کامپیوتر خود را از دانشگاه صنعتی شریف، و در سال‌های ۱۳۷۳ و ۱۳۷۷ مدارک کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشته مهندسی برق و کامپیوتر از دانشگاه کلرادو در بولدر آمریکا دریافت نمود. در فاصله سال‌های ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۰ ایشان به عنوان طراح ارشد سیستم‌های دیجیتال در شرکت‌های مختلفی در دره سیلیکون به کار مشغول بود. از سال ۱۳۸۰ تاکنون دکتر صدیقی عضو هیأت علمی دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات دانشگاه صنعتی امیرکبیر می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه ایشان شامل محاسبات کوانتومی، سنتز سیستم‌های حسابی، و سیستم‌های نهفته می‌باشد.

- [9] M. Mottonen, J. J. Vartiainen, V. Bergholm, and M. M. Salomaa, "Quantum circuits for general multiqubit gates," *Physical Review Letters*, vol. 93, p. 130502, Sep. 2004.
- [10] V. Bergholm, J. J. Vartiainen, M. Mottonen, and M. M. Salomaa, "Quantum circuits with uniformly controlled one-qubit gates," *Physical Review A*, vol. 71, no. 5, pp. 23-30, May 2005.
- [11] V. V. Shende, S. S. Bullock, and I. L. Markov, "Synthesis of quantum-logic circuits," *IEEE Trans. on CAD*, vol. 25, no. 6, pp. 1000-1010, Jun. 2006.
- [12] A. M. Steane, "Error correcting codes in quantum theory," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, no. 5, pp. 793-797, Jul. 1996.
- [13] D. Bacon, "Operator quantum error-correcting subsystems for self correcting quantum memories," *Phys. Rev. A*, vol. 73, no. 1, pp. 01234001-0124013, Jan. 2006.
- [14] G. D. Forney, M. Grassl, S. Guha, "Convolutional and tail-biting quantum error-correcting codes," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 53, no. 3, pp. 865-880, Mar. 2007.
- [15] M. Houshmand, S. Hosseini-Khayat, and M. M. Wilde, "Minimal-memory, non-catastrophic, polynomial-depth quantum convolutional encoders," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 59, no. 2, pp. 1198-1210, Feb. 2013.
- [16] V. Kliuchnikov, D. Maslov, and M. Mosca, "Fast and efficient exact synthesis of single qubit unitaries generated by clifford and T gates," *Quantum Information and Computation*, vol. 13, no. 7-8, pp. 607-630, Jul. 2013.
- [17] B. Giles and P. Selinger, "Exact synthesis of multiqubit clifford+T circuits," *Physical Review A*, vol. 87, no. 3, p. 032332, Mar. 2013.
- [18] C. Lin and A. Chakrabarti, "FTQLS: fault-tolerant quantum logic synthesis," *IEEE Trans. on VLSI Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 1350-1363, Jun. 2014.
- [19] M. Saeedi, M. Arabzadeh, M. Saheb Zamani, and M. Sedighi, "Block-based quantum-logic synthesis," *Quantum Information and Computation J.*, vol. 11, no. 3, pp. 262-277, Mar. 2011.
- [20] R. Wille, M. Saeedi, and R. Drechsler, "Synthesis of reversible functions beyond gate count and quantum cost," in *Proc. 18th Int. Workshop on Logic and Synthesis*, pp. 43-49, Aug. 2009.
- [21] M. Mohammadi and M. Eshghi, "On figures of merit in reversible and quantum logic designs," *Quantum Information Processing*, vol. 8, no. 4, pp. 297-318, Aug. 2009.
- [22] M. Saeedi and I. L. Markov, "Synthesis and optimization of reversible circuits-a survey," *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 45, no. 2, 34 pp., 2013.
- [23] E. P. Chong and S. H. Zak, *An Introduction to Optimization*, 4th Ed. Wiley, 2013.
- [24] V. V. Shende, I. L. Markov, and S. S. Bullock, "Smaller two-qubit circuits for quantum communication and computation," *Design Automation and Test in Europe*, pp. 980-985, Feb. 2004.