قیمت‌گذاری و تبلیغات همکارانه در زنجیره تامین دو سطحی با رویکرد تئوری بازی‌ها

مرضیه مظفری (نویسنده مسئول)
استادیار مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، واحد الکترونیکی، دانشگاه آزاد الکترونیکی، تهران
m.mozafari@aut.ac.ir
حمید قشقایی
دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، واحد الکترونیکی، دانشگاه آزاد الکترونیکی، تهران

چکیده

در این مقاله به بررسی هماهنگی تصمیمات قیمت‌گذاری و تبلیغات همکارانه در یک زنجیره تامین دو رده‌ای می‌پردازیم. از رویکرد تئوری بازی جهت مدلسازی و حل همزمان متغیرهای قیمت، مقدار سفارش اقتصادی، هزینه تبلیغات خرده فروش و سازنده در نقطه تعادل بازی بهره گرفته می‌شود. سه سناریوی بازی بر اساس مدل مسئله پسر روزنامه فروش طراحی شده: ۱) بازی استکلبرگ سازنده که در آن سازنده نقش پیشرو و خرده فروش به عنوان پیرو ، ۲) بازی نش که در آن سازنده و خرده فروش از قدرت یکسانی در بازار برخوردارند و ۳) بازی همکاری کامل که در آن سازنده و خرده‌فروش با همکاری بهترین تصمیمات را اتخاذ می‌نمایند. نشان خواهیم داد در بازی همکارانه، نسبت به زنجیره نامتمرکز افزایش هزینه تبلیغات به زنجیره تحمیل می‌گردد، اما منجر به افزایش سود و افزایش رضایت مشتری می‌گردد که این به معنای یک سیستم تصمیم‌گیری برد –برد برای مدیران و مشتریان زنجیره می‌باشد.

کلید واژه:
زنجیره تامین؛ تبلیغات همکارانه؛ قیمت‌گذاری؛ تئوری‌بازی‌ها؛ مسئله روزنامه فروش

مقدمه

تبلیغات همکارانه بین خرده فروش و سازنده بدین گونه تعریف می شود که سازنده با هدف دستیابی به تقاضای بیشتر و برند سازی و ایجاد انگیزه در رده خرده فروشی بخشی از هزینه تبلیغات را پرداخت می کند و خرده فروش با هدف دستیابی به تقاضای بیشتر هزینه تبلیغات محلی را پرداخت می کند. در واقع هر یک از اعضا زنجیره تامین با اهداف متفاوت بخشی از هزینه تبلیغات را متحمل می شوند [۱] Dridi &Ben . [۲] Berger اولین مقاله‌ایی بود که بر روی یک زنجیره تامین دو سطحی با رویکرد تبلیغات همکارانه به عنوان تخفیف قیمت عمده فروشی به خرده فروش ارائه گردید. [۳] Aust and Buscherدر مقاله ایی به مرور ادبیات برای مقالات در حوزه تبلیغات و افزایش رشد تحقیقات انجام شده بر روی تبلیغات در دو بخش تبلیغات همکاری و تبلیغات همکاری در طی ٤٠ سال گذشته در زنجیره تامین پرداختند. [٤] Xie and Neyr به گسترش نقش تئوری بازیها و زنجیره تامین با بررسی توازن قدرت میان اعضا و شناسایی نقش تبلیغات و قیمت با رویکرد نظریه بازیها انجام دادند [٥] He et al به ارائه یک قرارداد جدید در زنجیره تامین دو سطحی برای رسیدن به هماهنگی با تقاضای تصادفی وابسته به قیمت و هزینه تبلیغات پرداختند. [٦] Karray and Amin به بررسی تبلیغات همکارانه در زمانیکه رقابیت بین خرده فروشان برقرار می باشد با بررسی رقابت بین خرده فروشان با در نظر گرفتن هم قیمت و هم هزینه تبلیغات در دو بازی بدون همکاری و بازی با همکاری در تبلیغات پرداختند. Yan et al [٧] به بررسی نقش تسهیم اطلاعات در یک زنجیره دوسطحی با تقاضای تصادفی برای همکاری در تبلیغات پرداخته و آنها نشان دادند که اطلاعات نقش مهمی در تصمیمات خرده فروش و عمده فروش برای سرمایه گذاری در تبلیغات دارد .[٨] Chen مطالعه یک مسئله فروش در یک زنجیره تامین دوسطحی شامل خرده فروش و سازنده با هدف شناسایی تاثیر تبلیغات به همراه سیاست بازگشت در دو حالت

همکارانه و غیر همکارانه انجام داد. Naimi Sadigh et al [۹] به بررسی یک زنجیره تامین سه سطحی شامل چندین تامین کننده و یک سازنده و چندین خرده فروش با تقاضای وابسته به قیمت و هزینه تبلیغات با تصمیم گیری بر روی مقدار سفارش اقتصای و قیمت و هزینه تبلیغات پرداخته و در نهایت در مدل سطح بهینه موجود را بدست آوردند. Jorgensen & Zaccour [۱۰] به ارزیابی مدلهای نظریه بازیها در تبلیغات همکارانه پرداختند و تقریبا تمام مدلهای به کار گرفته شده تاکنون در تبلیغات همکارانه با نظریه بازیها را نشان دادند به طوریکه در بررسی های خود به دو دسته مطالعات دینامیک و مطالعات استاتیک اشاره نمودند و بررسی خود را ابتدا برای زنجیره تامین دو سطحی با یک خرده فروش و یک عمده فروش و در حالت دوم به بررسی زنجیره تامین با رقابیت افقی میان اعضا برای تحقیقات انجام شده در این حوزه را نشان دادند. Alirezae [۱۱]در تحقیقی به هماهنگی در زنجیره تامین دو سطحی با رویکرد تعین بهینه قیمت و تعیین بهینه هزینه تبلیغات با تئوری بازیها در چهار روش نش، استکلبرگ خرده فروش پیشرو ، استکلبرگ عمده فروش پیش رو ، بازی با همکاری و در نهایت چگونگی دستیابی به یک طرح برای دستیابی به هماهنگی در زنجیره منجر می گردد ، انجام داد. Szmerekovsky and zhang [۱۲] به بررسی تبلیغات و قیمت گذاری در یک زنجیره تامین دو سطحی جایی که تقاضا نامعین وابسته به قیمت خرده فروش و تبلیغات بود و از بازی استکلبرگ و نش و همکاری برای حل مدل استفاده نمودند آنها نشان دادند که در یک زنجیره تامین دو سطحی هزینه تبلیغات محلی برای تصمیم گیری مناسب نیست و بهتر برای اعضا می باشد که تبلیغات میدانی افزایش یافته و قیمت عمده فروشی کمتری به خرده فروش پیشنهاد گردد[۱۳] SeyedEsfahani et al . به بررسی یک زنجیره تامین دوسطحی با تقاضای وابسته به قیمت و هزینه تبلیغات و نقش هماهنگی در زنجیره در چهار حالت بازی با همکاری و بازی استکلبرگ خرده فروش و بازی استکلبرگ عمده فروش و تعادل نش پرداختند و نشان دادند که تبلیغات در شرایط همکارانه نقش استراتژیک در تصمیمات اساسی زنجیره به همراه دارد آنها در تحقیق خود از یک تابع تقاضای غیر خطی استفاده نمودند [۱٤] Aust .به بررسی مدل همکاری تبلیغات و تصمیم گیری در خصوص قیمت با چهار حالت تئوری بازیها شامل تعادل نش و استکلبرگ خرده فروش و استکلبرگ عمده فروش و بازی با همکاری پرداختند وی به توسعه مدلهای موجود اقدام نموده و نقش ریسک و چانه زنی را در مدل خود آورد و نشان داد که در حالت همکاری سود سیستم ماکزیمم مقدار خود می باشد.وی نشان داد کاهش قیمت و افزایش هزینه در تبلیغات موجب افزایش رضایت مشتری اگر ساختار هماهنگی بین خریدار و فروشنده باشد می گردد. تفاوت اصلی مدل در این مقاله با تحقیقات انجام شده ترکیب مسئله روزنامه فروش با تبلیغات همکارانه با تقاضای تصادفی وابسته به قیمت و هزینه تبلیغات با هدف بدست اوردن متغیرهای مقدار سفارش و قیمت گذاری و سهم تبیلغات در یک تابع جمعی تصادفی تقاضا است. مفروضات مسئله شامل، تابع تقاضای محصول یک تابع جمعی وابسته به قیمت و هزینه تبلیغات محلی و میدانی است که دارای یک عامل تصادفی می‌باشدو خرده فروش برای یک بار در ابتدای دوره فقط می تواند سفارش دهی انجام دهد.

۱. تعریف مسئله

یک زنجیره تامین تک محصولی و دو رده‌ای شامل یک سازنده و یک خرده فروش را در نظر بگیرید، تقاضای محصول وابسته به قیمت و تبلیغات است و خرده فروش می‌تواند با کاهش قیمت و یا اقدام به تبلیغات تقاضای محصول را افزایش دهد. از طرفی تبلیغات همراه با هزینه برای خرده فروش می‌باشد که این امر باعث کاهش سود خرده‌فروش و در نتیجه کاهش انگیزه او برای انجام تبلیغات می‌شود. در چنین شرایطی سازنده برای ترغیب خرده‌فروش به انجام تبلیغات و در نتیجه افزایش تقاضای زنجیره، بخشی از هزینه تبلیغات را به عهده می‌گیرد تا حاشیه سود خرده فروش را بهبود دهد. از طرف دیگر فرض می‌شود تقاضای محصول تصادفی است. به عبارت دیگر نه تنها تقاضای محصول با تغییر قیمت فروش و میزان تبلیغات تغییر می‌کند بلکه یک عامل تصادفی نیز بر میزان تقاضای محصول تاثیرگذار خواهد بود.مسئله مورد نظر مفروضات مدل پسر روزنامه فروش را در نظر می‌گیرد که در آن موجودی برای یک دوره سفارش داده می‌شود و با توجه به میزان تقاضای دوره مصرف می‌شود و موجودی مازاد انتهای دوره فاقد ارزش اسقاط است. هدف تعیین مقدار بهینه سفارش اقتصادی، میزان مشارکت سازنده و خرده فروش در تبلیغات و همچنین قیمت خرده فروشی و قیمت عمده فروشی در یک زنجیره تامین دورده‌ای است که به دنبال ایجاد هماهنگی میان اعضای آن هستیم. در مسئله پسر روزنامه فروش قبل از فصل فروش، خرده فروش قیمت خرده فروشی ،هزینه تبلیغات محلی و اندازه انباشته سفارش خود را تعیین می‌کند و سازنده در مورد هزینه تبلیغات میدانی و قیمت عمده فروشی تصمیم‌گیری می‌نماید. علائم مورد استفاده در مدلسازی مسئله مطابق ذیل می‌باشد:

معرفی علامت‌های ریاضی

تابع توزیع تجمعی تقاضا	$F(x)$
تابع چگالی تقاضای احتمالی	$f(x)$
میانگین توزیع احتمالی تقاضا	μ
هزینه تولید هر واحد	c
مقدار سفارش	q
قیمت خرده فروشی	p
هزینه تبلیغات عمده فروش	n
هزینه تبلیغات خرده فروش	e
تابع توزیع تقاضای تصادفی	$D(\mathrm{p, n, e}, e)$
تابع معین موثر بر تقاضا وابسته به هزینه تبلیغات خرده فروش و عمده	h(n, e)
تابع خطی تقاضای وابسته به قیمت	d(p)
متغیر تصادفی آشکار شده با توزیع یکنواخت	ε
فاکتور ذخیر سازی(stocking factor)	z
تابع احتمال مواجه با کمبود	$\Theta(z)$
تابع سود تامین کننده	p_s
تابع سود خرده فروش	p_r
تابع سود کل زنجیره تامین	p_c

فرض می‌شود تابع تقاضای محصول یک تابع جمعی وابسته به قیمت و هزینه تبلیغات محلی و میدانی است که دارای یک عامل تصادفی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(\mathrm{p, n, e}, \varepsilon) = \mathrm{d(p)} + \mathrm{h(n, e)} + \varepsilon \rightarrow \tag{۱}$$

به طوری که $\mathrm{d(p)}$ وابستگی تقاضا به قیمت خرده فروشی را نشان می دهد و به صورت تابع خطی $\mathrm{d(p) = a - bp}$ تعریف می شود که در آن a میزان مقیاس بازار و b ضریب الاستیسیته تقاضا نسبت به قیمت است و $h(n,e)$ وابستگی تقاضا به هزینه تبلیغات را نشان می دهد و به صورت تابع غیرخطی مشابه با (xie and wei ۲۰۰۹) $h(n,e) = k_1\sqrt{n} + k_2\sqrt{e}$ در نظر گرفته می شود که در آن k_1 ضریب الاستیسیته تقاضا نسبت به هزینه تبلیغات سازنده و k_2 ضریب الاستیسیته تقاضا نسبت به هزینه تبلیغات خرده فروش است.

ε یک متغیر تصادفی است که دارای تابع توزیع یکنواخت در بازه $[A, B]$ می باشد. در ادامه با توجه به علائم و مفروضات مسئله به مدلسازی و جستجوی مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم تحت سه سناریوی مختلف قدرت در بازار می پردازیم.

۲. بازی با همکاری کامل

در این سناریو فرض می شود سازنده و خرده فروش دارای همکاری کامل می باشند و یک زنجیره تامین یکپارچه و متمرکز را تشکیل می دهند. در این سناریو جواب بهینه عمومی کل سیستم از بهینه سازی تابع سود کل زنجیره قابل حصول است و هیچ مانع انگیزشی برای دستیابی به این جواب وجود ندارد. تابع سود کل زنجیره به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\pi_C(q,p,n,e) = pE[\min(\mathrm{D},\mathrm{q})] - \mathrm{c}\,q - \mathrm{n} - e \tag{۲}$$

$$(q,p,n,e) \in \arg\max\ \pi_C$$

که در آن $E[\min(\mathrm{D},\mathrm{q})]$ متوسط مقدار فروش محصول را نشان می‌دهد. به منظور محاسبه متوسط مقدار فروش ابتدا با بکارگیری رویکردی مشابه با (Petruzi and Dada ۱۹۹۱) فاکتور ذخیر سازی z را با تغییر متغیر زیر تعریف می نماییم:

$$z = q - \mathrm{d(p)} - \mathrm{h(n,e)} \tag{۳}$$

بنابراین تابع سود کل زنجیره در سناریوی همکاری کامل به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\pi_C(p,z,n,e) = p(\mathrm{E}[\min(\mathrm{z},\varepsilon)] + \mathrm{d(p)} + \mathrm{h(n,e)}) - cq - n - e \tag{۴}$$

$$= p(\mathrm{E}[\min(\mathrm{z},\varepsilon)] + \mathrm{d(p)} + \mathrm{h(n,e)}) - c\left[z + d(p) + h(n,e)\right] - n - e$$

لم ۱: تابع سود کل زنجیره در حالت متمرکز شبه مقعر است. (اثبات در پیوست a)

مقدار بهینه متغیرهای تصمیم سازنده و خرده فروش با مشتق گیری از تابع سود کل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \pi_C}{\partial z} = 0 \Rightarrow F(\mathrm{z}) = 1 - \frac{c}{p} \tag{۵}$$

$$\frac{\partial \pi_C}{\partial p} = 0 \Rightarrow p = \frac{\mu - \Theta(z) + a + h(n,e) + cb}{2b} \tag{۶}$$

سپس به ازای ﴿معادله های ٥ و ٦ ﴾ برای z و p بدست آمده، با حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول مقدار بهینه z^* به صورت زیر بدست می آید:

$$\left[\mu - \Theta(z*) + a\right]\left[1 - F(z*)\right] + \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}\right] \times \left[cF(z*)\right] + cb\left[1 - F(z*)\right] - 2cb = 0 \tag{۷}$$

از آنجا که به ازای مقدار بهینه z^* معادله ۷ برقرار شده است، میتوان مقادیر بهینه سایر متغیرهای تصمیم شامل قیمت خرده فروشی، اندازه انباشته سفارش، هزینه تبلیغات محلی خرده فروش، و هزینه تبلیغات میدانی سازنده را بدست آورد. قیمت خرده فروشی بهینه برابر خواهد بود با:

$$p_C^* = \frac{c}{1 - F(z^*)} \tag{۸}$$

با برابر صفر قرار دادن مشتق جزیی تابع سود کل ,متغیرها صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{\partial p_C}{\partial e} = 0 \Rightarrow \qquad e_C^* = \left[\frac{k_2(p^* - c)}{2}\right]^2$$

$$\frac{\partial \pi_c}{\partial n} = 0 \Rightarrow \quad n_c^* = \left[\frac{k_1(p^* - c)}{2}\right]^2 \qquad (۱۰)$$

$$q_c^* = z^* + d(p) + h(n,e) = z^* + \left[a - bp^* + k_1\sqrt{n^*} + k_2\sqrt{e^*}\right] \qquad (۱۱)$$

۳. بازی تعادل استکلبرگ سازنده پیشرو

در این سناریو مسئله بدین گونه آغاز می شود که سازنده به عنوان پیشرو ابتدا تصمیمات خود را اعلام می‌کند و سپس خرده فروش به عنوان بازیکن پیرو بهترین عکس العمل را نسبت به استراتژی سازنده انتخاب می‌کند و در مورد متغیرهای تحت کنترل خود تصمیم‌گیری می‌نماید. بنابراین مدل مسئله در سناریوی بازی استکلبرگ یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی خواهد بود که در سطح بالاتر زیرمدل سازنده و در سطح پایین زیر مدل خرده فروش قرار دارد.

$$Max \quad \pi_S(w,n) = (w - c)\,q - n \qquad (۱۲)$$

$$s.t. \quad (p,q,e) \in \operatorname{argmax} \pi_r = p\left[E(\min(D(p,n,e),q)\right] - wq - e$$

به منظور حل مدل برنامه ریزی دو سطحی به دست آمده در سناریوی بازی استکلبرگ سازنده، می‌توان شرایط بهینگی مدل سطح پایین که به عنوان بهترین عکس‌العمل بازیکن پیرو به تصمیمات بازیکن پیشرو در نظر گرفته می‌شود را به فضای محدودیت‌های مدل سطح بالاتر اضافه نمود. و سپس تابع سود بازیکن رهبر را با توجه به بهترین عکس العمل بازیکن پیرو ماکزیمم سازی نمود. بدین صورت مدل برنامه ریزی دوسطحی تبدیل به یک مدل برنامه ریزی تک سطحی معادل می‌شود.

تابع سود خرده‌فروش را با تغییر متغیر به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\pi_r(p,q,e) = p\left[E(\min(D(p,n,e),q)\right] - wq - e = \qquad (۱۳)$$

$$p(E[\min(z,e)] + d(p) + h(n,e)) - w\left[z + d(p) + h(n,e)\right] - e$$

لم ۲ تابع سود خرده‌فروش نسبت به متغیرهای تصمیم خرده‌فروش شبه مقعر است.

با توجه به لم ۲ مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم خرده فروش شامل قیمت خرده فروشی , هزینه تبلیغات محلی و میدانی و مقدار سفارش اقتصادی برحسب متغیر w به صورت یکتا وجود دارند و شکل ذیل بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial p} = 0 \Rightarrow p(w) = \frac{w}{1 - F(z)} \qquad (۱۴)$$

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial e} = 0 \Rightarrow e(w) = \left[\frac{k_2^2 wF(z)}{2(1 - F(z))}\right]^2 \qquad (۱۵)$$

$$q(w) = z + (a - b(\frac{w}{1 - F(z)}) + k_1\sqrt{n} + \left[\frac{k_2^2 wF(z)}{2(1 - F(z))}\right] \qquad (۱۶)$$

حال با قرار دادن مقادیر بهینه تصمیمات خرده فروش در مدل سازنده ، تابع سود سازنده به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\pi_S(w,n) = (w - c)\,q - n \qquad (۱۷)$$

$$\pi_S(w,n) = (w - c)\,q - n \Rightarrow (w - c)(z + a - b(\frac{w}{1 - F(z)}) + k_1\sqrt{n} + \left[\frac{k_2^2 wF(z)}{2(1 - F(z))}\right]) \qquad (۱۸)$$

لم ۳: تابع سود سازنده در حالت استکلبرگ نسبت به متغیرهای تصمیم سازنده شبه مقعر است.

با توجه به خاصیت تقعر تابع سود سازنده نسبت به متغیرهای تصمیم خود، میتوان با مشتق گیری از تابع سود سازنده نسبت متغیرهای تصمیم اش، مقادیر بهینه تصمیمات سازنده در نقطه تعادل استکلبرگ را به دست آورد. با حل مدل استکلبرگ جواب بهینه به ازای متغیرهای تصمیم مسئله شامل قیمت عمده فروشی ، قیمت خرده ، هزینه تبلیغات بهینه محلی و میدانی و مقدار سفارش بهینه به شرح ذیل می باشد:

$$w^* = \frac{2(1-F(z)(z+a)+2bc-ck_1^2(1-F(z)-ck_2^2F(z)}{4b-2k_1^2(1-F(z)-2k_2^2F(z)} \tag{۱۹}$$

$$n^* = \left[\frac{(w^*-c)k_1}{2}\right]^2 \tag{۲۰}$$

$$q^* = z+(a-b(\frac{w^*}{1-F(z)})+\frac{(w^*-c)k_1^2}{2}+\left[\frac{k_2^2w^*F(z)}{2(1-F(z)}\right] \tag{۲۱}$$

$$p^* = \frac{w^*}{1-F(z)} \tag{۲۲}$$

$$e^* = \left[\frac{k_2w^*F(z)}{2(1-F(z)}\right]^2 \tag{۲۳}$$

با مقایسه جوابهای بدست آمده بین بازی استکلبرگ و بازی با همکاری نتایج زیر حاصل می شود :

Property ۱: $e_d^* < e_c^*, n_d^* < n_c^*, p_d^* > p_c^* \text{ and } q_d^* < q_c^*$

Property ۲: $n_d^* / e_d^* < n_c^* / e_c^*$

Property ۳: $dn_d^* / dk_1 > 0, de_d^* / dk_2 > 0, \partial q_d^* / dk_2 > 0 \text{ and } \partial q_d^* / dk_1 > 0$

نتیجه ۳ نشان می دهد که در بازی استکلبرگ همواره با افزایش مقدار k۱ هزینه تبلیغات میدانی افزایش میابد و در یک الگوی یکنواخت می توان برای افزایش k۲ افزایش هزینه تبلیغات محلی به همراه دارد .همچنین مقدار سفارش اقتصادی بهینه با افزایش ضرایب k افزایش میابد.این نتیجه گیری برای تعادل نش و بازی همکاری نیز قابل تعمیم می باشد.جاییکه: $k = k_2 / k_1$

۴. بازی تعادل نش

در این سناریو فرض می‌شود سازنده و خرده فروش دارای مالکیت مجزا هستند و به طور مستقل و بدون همکاری با یکدیگر استراتژی های خود را انتخاب میکنند. همچنین فرض می‌شود سازنده و خرده فروش از قدرت یکسان در بازار برخوردارند و به صورت همزمان تصمیمات خود را به بازار اعلام می‌نمایند. در این سناریو شرایط یک بازی تعادل نش برقرار است که در آن هر دو بازیکن (سازنده و خرده فروش) بدون توجه به میزان سود کل زنجیره به صورت همزمان تنها به دنبال بیشینه سازی سود فردی خود هستند و جواب تعادل نش زمانی حاصل می‌شود که تابع سود هر دو بازیکن به صورت همزمان بیشینه گردد .تابع سود سازنده با استفاده از تغییر متغیر z به صورت زیر فرموله می شود و مقدار بهینه متغیرهای تصمیم سازنده با برابر صفر قرار دادن مشتقات جزیی تابع سود نسبت به متغیرهای تصمیم قابل حصول است:

$$\pi_S(w,n) = (w-c)(z+d(p)+h(n,e))-n \tag{۲۴}$$

$$\frac{\partial \pi_S}{\partial n} = 0 \Rightarrow n = \left[\frac{(w-c)k_1}{2}\right]^2 \tag{۲۵}$$

برای محاسبه مقدار بهینه قیمت عمده فروشی نمیتوان از رابطه مشتق استفاده نمود، از این رو فرض می کنیم قیمت عمده فروشی w ضریبی ثابت مانند β از مقدار هزینه تولید c باشد. بنابراین به عبارت دیگر $w=\beta c$ می باشد با جایگذاری w مقدار بهینه هزینه تبلیغات به صورت ذیل محاسبه می شود:

$$n=\left[\frac{(w-c)k_1}{2}\right]^2=\left[\frac{c(b-1)k_1}{2}\right]^2 \qquad (۲۶)$$

تابع سود خرده فروش به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$p_r(p,q,e)=p(E[\min(z,e)]+d(p)+h(n,e))-w[z+d(p)+h(n,e)]-e \qquad (۲۷)$$

بنابراین نقطه تعادل نش مسئله از حل همزمان زیرمدل سازنده و خرده فروش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$w^*=\beta c \qquad (۲۸)$$

$$n^*=\left[\frac{c(b-1)k_1}{2}\right]^2 \qquad (۲۹)$$

$$p^*=\frac{\beta c}{1-F(z)} \qquad (۳۰)$$

$$e^*=\left[\frac{\beta k_2 F(z)}{2(1-F(z))}\right]^2 \qquad (۳۱)$$

$$q^*=z+(a-b(\frac{\beta c}{1-F(z)})+ck_1^2+\left[\frac{\beta k_2^2 F(z)}{2(1-F(z))}\right] \qquad (۳۲)$$

با مقایسه جوابهای بدست آمده بین بازی استکلبرگ و بازی با همکاری نتایج زیر حاصل می شود :

$e_d^* < e_c^*, n_d^* < n_c^*, p_d^* > p_c^*$ *and* $q_d^* < q_c^*$ **:Property۴**

$n_d^* / e_d^* < n_c^* / e_c^*$ **Property۵**

Property۶: $dn_d^* / dk_1 > 0, de_d^* / dk_2 > 0, \partial q_d^* / dk_2 > 0$ *and* $\partial q_d^* / dk_1 > 0$

۷. مثال عددی

به منظور نشان دادن رفتار مدل‌های پیشنهادی و ارزیابی نتایج بدست امده ابتدا فرض می شود تابع توزیع متغیر تصادفی ε دارای توزیع یکنواخت $[0, 2000]$ و $\beta=1.1$ باشد باقی پارامترها به‌صورت تصادفی از دامنه مقادیر، مطابق جدول ﴿۱﴾ انتخاب شده است.ما جوابهای بهینه را برای ۵ گروه که در جدول ﴿۲﴾نشان داده شده است ، برای سه ساختار مدلهای عنوان شده شامل تعادل نش و استکلبرگ و همکاری کامل بدست اوردیم که در جدول ﴿۳﴾جوابهای بهینه بدست آمده نشان داده شده است.

جدول ۱. بازه مقادیر عددی

Parameters	a	b	k_1	k_2
Ranges	$[2000-3500]$	$[0.010-0.015]$	$[0.01-0.05]$	$[0.01-0.05]$

جدول۲. گروه های مقادیر نمونه

Groups	a	b	k_1	k_2
Group ۱	۲،۰۰۰	۰,۰۱۰	۰,۰۱	۰,۰۱
Group ۲	۳،۰۰۰	۰,۰۱۵	۰,۰۲	۰,۰۵
Group ۳	۳،۰۰۰	۰,۰۱۲	۰,۰۴	۰,۰۲
Group ۴	۳،۰۰۰	۰,۰۱۰	۰,۰۲	۰,۰۴
Group ۵	۳.۵۰۰	۰,۰۱۰	۰,۰۵	۰,۰۵

جدول۳. جوابهای بدست امده برای سه بازی

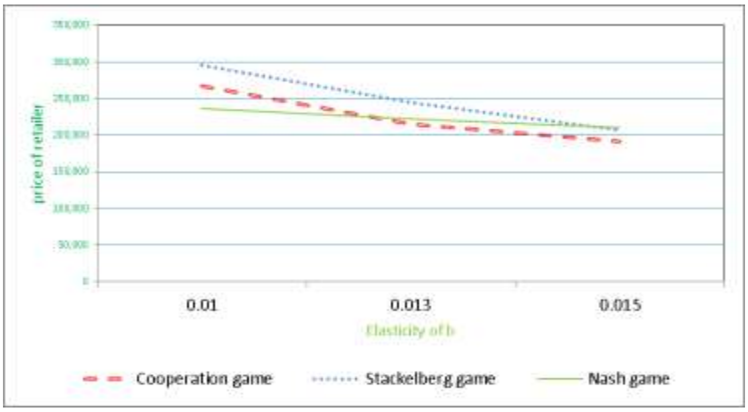
	Groups	p	q	n	e	w	π_s	π_r	π_T
Cooperation game	Group ۱	۱۹۷.۵۳۱	۴۰۸	۳۵،۲۱۴	۳۵،۲۱۴				۸،۱۲۷،۹۸۰
	Group ۲	۱۹۱.۶۱۷	۵۰۲	۹۹.۹۶۲	۶۲۴.۷۶۲				۹.۹۱۷،۲۵۲
	Group ۳	۲۲۹.۲۲۶	۹۲۳	۱.۹۱۶.۹۱۶	۴۷۹،۲۲۹				۴۰،۵۵۹،۵۰۷
	Group ۴	۲۶۷.۳۳۵	۱.۲۳۷	۱.۱۵۲،۰۸۰	۴،۶۰۸،۳۲۱				۸۳،۹۱۶،۳۸۰
	Group ۵	۳۱۰،۶۸۰	۱.۷۴۰	۱۴،۱۹۰،۲۱۶	۱۴،۱۹۰۲۱۶		,		۱۶۰،۷۰۷،۸۵۲
Stackelberg game	Group ۱	۲۱۷.۹۶۱	۲۰۳	۶،۸۴۷	۳۴.۳۴۶	۱۷۶.۵۴۹	۳.۳۵۳.۶۵۰	۵۰۶.۷۷۶	۳.۸۶۰،۴۲۷
	Group ۲	۲۰۸.۵۴۷	۲۴۴	۱۹.۹۸۵	۶۱۲.۹۳۸	۱۷۴.۱۳۷	۳.۴۲۶،۰۹۴	۲،۰۹۷،۴۵۸	۵،۵۲۳،۵۵۲
	Group ۳	۲۶۷.۳۲۱	۴۳۱	۲۸۲.۸۱۵	۴۴۰،۵۳۱	۱۸۶.۵۹۰	۱۱.۱۶۹.۳۷۷	۹.۹۴۸.۹۶۴	۲۱.۱۱۸.۳۴۱
	Group ۴	۳۳۰،۹۱۴	۵۸۱	۱۴۴.۷۹۶	۳.۹۵۹.۳۵۷	۱۹۸،۰۵۲	۲۱.۹۶۵.۸۲۵	۱۹،۸۹۷،۵۹۹	۴۱.۸۶۳.۴۲۴
	Group ۵	۳۹۹.۳۴۰	۶۹۸	۱.۳۰۳،۰۲۲	۱۰،۸۳۶،۷۲۱	۲۰۵.۶۶۰	۳۰،۵۸۰،۱۱۵	۳۰،۴۶۹.۹۱۷	۶۱،۰۵۰،۰۳۱
Nash game	Group ۱	۲۱۷۲۸۴	۲۱۰	۶۴۰۰	۳۴۱۳۳	۱۷۶۰۰۰	۳.۳۵۶.۸۴۸	۹۵۷.۴۴۷	۴.۳۱۴.۲۹۵
	Group ۲	۲۱۰،۷۷۸	۲۱۱	۲۵،۶۰۰	۶۲۶،۱۲۵	۱۷۶،۰۰۰	۳.۳۷۷.۲۳۸	۱،۶۵۱،۲۱۳	۵،۰۲۸،۴۵۱
	Group ۳	۲۵۲۱۴۹	۶۰۴	۱۰۲۴۰۰	۳۹۱۹۴۴	۱۷۶۰۰۰	۹،۶۵۶،۲۱۰	۲۵،۷۹۷،۰۰۸	۳۵،۴۵۳،۲۱۸
	Group ۴	۲۹۴۰۶۹	۹۳۶	۲۵۶۰۰	۳۱۲۶۷۳۵	۱۷۶۰۰۰	۱۴،۹۷۹.۷۶۴	۶۰،۹۵۰،۸۵۷	۷۵،۹۳۰،۶۲۱
	Group ۵	۳۴۱۷۴۸	۱۲۱۳	۱۶۰۰۰۰	۷۹۳۶۴۰۰	۱۷۶۰۰۰	۱۹،۴۱۳،۷۱۸	۱۱۹،۶۲۶،۱۵۹	۱۳۹،۰۳۹،۸۷۷

تحلیل حساسیت:

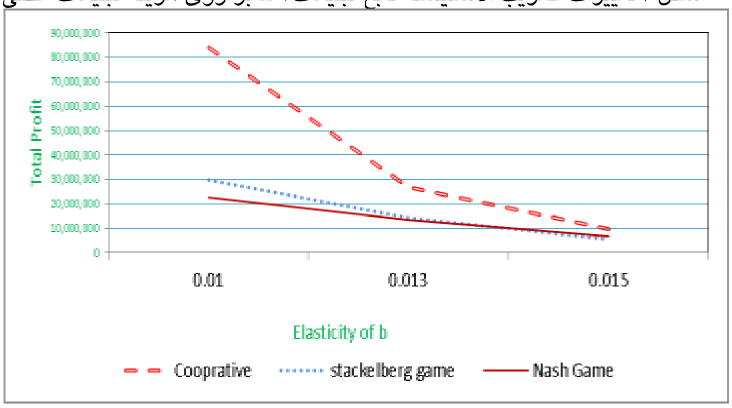
در جدول شش نتایج بدست آمده از نتایج ۳ و۷ برای هر دو بازی نش و بازی استکلبرگ مشاهده می شود.با افزایش k_1 مقدار n افزایش میابد و در یک الگوی یکنواخت به ازای افزایش k_2 مقدار تبلیغات محلی e افزایش میابد و به ازای افزایش ضریب k مقدار سفارش اقتصادی q افزایش میابد که در نمودار های یک و دو همچنین مطابق نتیجه گیری دو و شش نسبت تبلیغات میدانی به محلی در بازی استکلبرگ و بازی نش در مقابل نسیت هزینه تبلیغات میدانی به هزینه تبلیغات محلی در شرایط هماهنگی کمتر می باشد. در واقع نسبت هزینه شده تبلیغات در بازی با همکاری نسبت به دو بازی نش و استکلبرگ بیشتر می باشد .

جدول ٤. اثر ضرایب k_1 و k_2 بر روی جواجوابهای بهینه در بازی همکارانه، نش و استکلبرگ با a=۳۰۰۰; b=۰,۰۱۲

Structure	Groups	p	q	n	e	w	π_s	π_r	π_c	$K = K_2 / K_1$
Cooperation game	Group ۲	۲۳۰،۸۸۰	۹۴۶	۳،۱۴۰،۰۰۴	۵۰۲،۴۰۱				۴۱،۶۶۵،۲۰۰	۲,۵
	Group ۴	۲۲۹،۲۲۶	۹۲۳	۱،۹۱۶،۹۱۶	۴۷۹،۲۲۹				۴۰،۵۵۹،۵۰۷	۰,۵
	Group ۵	۲۳۵،۲۹۴	۱،۰۰۵	۳،۵۴۳،۲۵۳	۳،۵۴۳،۲۵۳				۴۴،۴۶۷،۸۲۰	۱
Stackelberg game	Group ۲	۲۷۱،۴۸۳	۴۴۷	۷۹،۱۷۱	۲،۹۰۹،۷۳۲	۱۸۸،۱۳۷	۱۲،۵۰۱،۸۱۲	۸،۷۶۹،۱۷۴		۲,۵
	Group ۴	۲۶۷،۳۲۱	۴۳۱	۲۸۲،۸۱۵	۴۴۰،۵۳۱	۱۸۶،۵۹۰	۱۱،۱۶۹،۳۷۷	۹،۹۴۸،۹۶۴		۰,۵
	Group ۵	۲۷۷،۶۴۷	۴۳۴	۵۱۸،۴۰۰	۳،۲۳۳،۱۴۶	۱۸۸،۸۰۰	۱۱،۹۸۴،۸۳۴	۶،۹۰۷،۸۶۲		۱
Nash game	Group ۲	۲۵۳۹۶۸	۶۴۹	۲۵،۶۰۰	۲،۵۴۶،۴۰۹	۱۷۶،۰۰۰	۱۰،۳۸۹،۷۳۳	۲۴،۹۶۰،۱۴۹		۲,۵
	Group ۴	۲۵۲۱۴۹	۶۰۳	۱۰۲،۴۰۰	۳۹۱،۹۴۴	۱۷۶،۰۰۰	۹،۶۵۶،۲۱۰	۲۵،۷۹۷،۰۰۸		۰,۵
	Group ۵	۲۵۸۸۲۴	۶۳۸	۱۶۰،۰۰۰	۲،۸۰۹،۶۱۵	۱۷۶،۰۰۰	۱۰،۲۰۶،۴۳۵	۲۸،۶۹۸،۷۰۶		۱

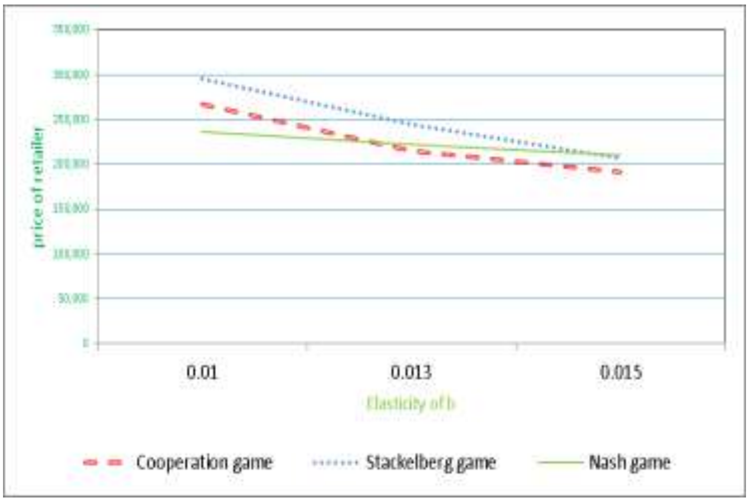


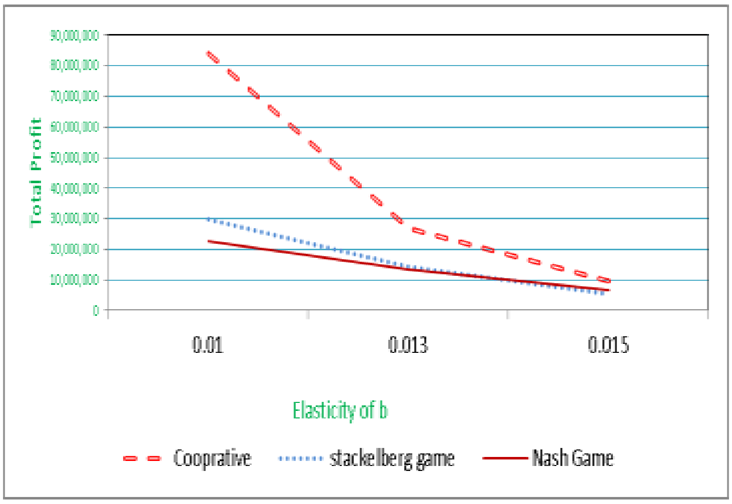
شکل۱ تغییرات ضریب الاستیسته تابع تبلیغات۲ k بر روی هزینه تبلیغات محلی.



شکل ۲. تغییرات ضریب الاستیسته تابع تبلیغات k بر روی مقدار سفارش برای بازی نش و استکلبرگ

با افزایش ضریب الاستیسیته تقاضا b به طور چشمگیری مقدار قیمت خرده فروش ، مقدار سفارش اقتصادی ،هزینه تبلیغات میدانی،هزینه تبلیغات محلی کاهش میابد.و به طور معنی دار سود خرده فروش و سود عمده فروش و سود کل زنجیره تامین با افزایش b کاهش میابد ، که در نمودار تغییرات هزینه تبلیغات محلی خرده فروش و هزینه تبلیغات میدانی عمده فروش و تغییرات سود خرده فروش و عمده فروش با ازای تغییرات b در دو بازی تش و استکلبرگ نمایش داده شده است.





شکل۵: تغییرات سود و قیمت زنجیره تأمین به ازای تغییر b در بازی همکارانه با بازی تعادل نش و بازی تعادل استکلبرگ

نتیجه گیری

این مقاله هماهنگی تصمیمات زنجیره تامین دوسطحی بین سازنده و خریداربا رویکرد تئوری بازیها تحت سه سناریوی بازی تعادل استکلبرگ سازنده پیشرو، بازی تعادل نش و همکاری کامل را مورد بررسی قرار دادیم و شناسایی قیمتْ بهینه خرده فروش , قیمت بهینه عمده فروش، مقدار سفارش بهینه و مقدرا هزینه تبلیغات بهینه خرده فروش و هزینه تبلیغات میدانی عمده فروش در مدل پسر روزنامه فروش را شناسایی کردیم.تقاضا همزمان متاثر از قیمت خرده فروشی محصول و هزینه تبلیغات لحاظ کردیم و با یک تابع تقاضا جمعی با مدل هزینه تبلیغات در دو بخش هزینه تبلیغات میدانی و هزینه تلیغات محلی جوابهای بهینه را در سه حالت بدست آوردیم.با مقایسه جوابهای بدست

آمده نشان دادیم که افزایش ضریب الاستیسیته تقاضا به‌طور چشمگیری مقدار قیمت خرده‌فروش، مقدار سفارش اقتصادی، هزینه تبلیغات میدانی، هزینه تبلیغات محلی و سود زنجیره کاهش میابد. افزایش ضریب تابع تبلیغات منجر به افزایش هزینه تبلیغات محلی و میدانی می‌گردد. نسبت تبلیغات میدانی به محلی در بازی تعادل استکلبرگ و بازی تعادل نش در مقابل نسبت هزینه تبلیغات میدانی به هزینه تبلیغات محلی در شرایط بازی همکارانه کمتر است. درواقع نسبت هزینه شده تبلیغات در بازی همکارانه نسبت به دو بازی نش و استکلبرگ بیشتر است و مقدار هزینه تبلیغات محلی و هزینه تبلیغات میدانی در حالت متمرکز همواره بیشتر از غیرمتمرکز است. مقدار سفارش در بازی با همکاری بیشتر از حالت غیرمتمرکز است و قیمت خرده‌فروشی همواره در بازی با همکاری کمتر از حالت غیرمتمرکز است اما سود اعضا در بازی با همکاری کامل همواره نسبت به بازی با تعادل نش و بازی تعادل استکلبرگ بیشتر است و با کاهش قیمت خرده‌فروشی منجر به سود بیشتر برای اعضا می‌گردد و با کاهش قیمت خرده‌فروشی مشتری محصول نهایی نیز در یک مدل برد-برد همراه با اعضا زنجیره تأمین قرار می‌گیرد.پیشنهادهایی جهت تحقیقات آینده قراردادهای دیگر در زنجیره تأمین همچون قرارداد تسهیم درآمد و بازپسگیری کالا با رویکرد مسئله روزنامه‌فروش با تقاضای تصادفی و همچنین زنجیره تأمین سه سطحی برای تقاضای وابسته به قیمت و تبلیغات و بازی استکلبرگ خرده‌فروش زمانی که فروشنده دارای قدرت بیشتری می‌باشد ازجمله مواردی می‌باشند که برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌گردد. محور توسعه دیگر برای تحقیقات آتی استفاده از تقاضای غیرخطی وابسته به قیمت و تبلیغات می‌باشد.

منابع

(۱) Dridi, D., & Ben Youssef, S. (۲۰۱٥). A Game Theoretic Framework for Competing/Cooperating Retailers under price and advertising dependent demand. Munich Personal RePEc Archive, available at http://mpra.ub.uni-muenchen.de/٦۳۳۱۷/.

(۲) Berger, P. (۱۹۷۲). Vertical cooperative advertising ventures. Journal of Marketing research ۹ (۳), ۳۰۹- ۳۱۲.

(۳) Aust, G., & Buscher, U. (۲۰۱٤). Cooperative advertising models in supply chain management: A review. European Journal of Operational Research, ۲۳٤(۱), ۱-۱٤.

(۴) Xie, J., & Neyret, A. (۲۰۰۹). Computers & Industrial Engineering Co-op advertising and pricing models in manufacturer – retailer supply chains. Computers & Industrial Engineering, ٥٦(٤), ۱۳۷٥–۱۳۸٥. http://doi.org/۱۰.۱۰۱٦/j.cie. ۲۰۰۸,۰۸,۰۱۷

(۵) He, Y., Zhao, X., Zhao, L., & He, J. (۲۰۰۹). Coordinating a supply chain with effort and price dependent stochastic demand. Applied Mathematical Modelling, ۳۳(٦), ۲۷۷۷- ۲۷۹۰

(۶) Karray, S., & Amin, S. H. (۲۰۱٥). Cooperative advertising in a supply chain with retail competition. International Journal of Production Research, ٥۳(۱), ۸۸-۱۰٥.

(۷) Yan, R., Cao, Z., & Pei, Z. (۲۰۱٦). Manufacturer's cooperative advertising, demand uncertainty, and information sharing. Journal of Business Research, ٦۹(۲), ۷۰۹-۷۱۷.

(۸) Chen, T. H. (۲۰۱۱). Coordinating the ordering and advertising policies for a single-period commodity in a two-level supply chain. Computers & Industrial Engineering, ٦۱(٤), ۱۲٦۸-۱۲۷٤.

(۹) Naimi Sadigh, A., Chaharsooghi, S. K., & Sheikhmohammady, M. (۲۰۱٦). A game theoretic approach to coordination of pricing, advertising, and inventory decisions in a competitive supply chain. Journal of Industrial and Management Optimization, ۱۲(۱), ۳۳۷-۳٥٥

(۱۰)Jørgensen, S., & Zaccour, G. (۲۰۱٤). A survey of game-theoretic models of cooperative advertising. European Journal of Operational Research, ۲۳۷(۱), ۱-۱٤.

(۱۱)Alirezaei, A. (۲۰۱٤). International Journal of Industrial Engineering Computations, ٥, ۲۳–٤۰. http://doi.org/۱۰,٥۲٦۷/j.ijiec. ۲۰۱۳,۰۹,۰۰٦

(۱۲)Szmerekovsky, J. G., & Zhang, J. (۲۰۰۹). Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer. European Journal of Operational Research, ۱۹۲(۳), ۹۰٤–۹۱۷.

(۱۳)SeyedEsfahani, Mir Mehdi, Maryam Biazaran, and Mohsen Gharakhani. "A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer–retailer supply chains." European Journal of Operational Research ۲۱۱,۲(۲۰۱۱): ۲٦۳-۲۷۳.

(۱۴)[۳]Aust, G. (۲۰۱۵). *Vertical cooperative advertising and pricing decisions in a manufacturer-retailer supply chain: a game-theoretic approach. In Vertical Cooperative Advertising in Supply Chain Management (pp. ۶۵-۹۹). Springer International Publishing.*

پیوست a :

قضیه یک: f(x,y) تابع شبه مقعر است اگر ماتریس هشین آن نیمه معین منفی باشد.

قضیه ۲: ماتریس هشین H نیمه معین منفی (NSD) است اگر و تنها اگر داشته باشیم :

$$\begin{bmatrix} x, y \end{bmatrix} \times H \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \le 0 \qquad \text{(A-۱)}$$

ماتریس هشین تابع هدف زنجیره متمرکز به صورت زیر بدست می آید:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial\pi}{\partial p^2} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial z\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial z^2} & \frac{\partial\pi}{\partial z\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial z\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial n\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial n\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial n^2} & \frac{\partial\pi}{\partial n\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial e\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial e\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial e\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial e^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & 1-F(z) & \frac{k_1}{2\sqrt{n}} & \frac{k_2}{2\sqrt{e}} \\ 1-F(z) & -pf(z) & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{2\sqrt{n}} & 0 & -\frac{k_1(\text{p}-\text{c})}{4\sqrt{n^3}} & 0 \\ \frac{k_2}{2\sqrt{e}} & 0 & 0 & -\frac{k_2(\text{p}-\text{c})}{4\sqrt{e^3}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(A-۲)}$$

ا استقاده از قضیه یک و دو داریم:

(A-۳)

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial\pi}{\partial p^2} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial z\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial z^2} & \frac{\partial\pi}{\partial z\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial z\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial n\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial n\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial n^2} & \frac{\partial\pi}{\partial n\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial e\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial e\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial e\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial e^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & 1-F(z) & \frac{k_1}{2\sqrt{n}} & \frac{k_2}{2\sqrt{e}} \\ 1-F(z) & -pf(z) & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{2\sqrt{n}} & 0 & -\frac{k_1(\text{p}-\text{c})}{4\sqrt{n^3}} & 0 \\ \frac{k_2}{2\sqrt{e}} & 0 & 0 & -\frac{k_2(\text{p}-\text{c})}{4\sqrt{e^3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & z & n & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\pi}{\partial p^2} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial p\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial z\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial z^2} & \frac{\partial\pi}{\partial z\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial z\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial n\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial n\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial n^2} & \frac{\partial\pi}{\partial n\partial e} \\ \frac{\partial\pi}{\partial e\partial p} & \frac{\partial\pi}{\partial e\partial z} & \frac{\partial\pi}{\partial e\partial n} & \frac{\partial\pi}{\partial e^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ z \\ n \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & z & n & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2b & 1-F(z) & \frac{k_1}{2\sqrt{n}} & \frac{k_2}{2\sqrt{e}} \\ 1-F(z) & -pf(z) & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{2\sqrt{n}} & 0 & -\frac{k_1(\text{p}-\text{c})}{4\sqrt{n^3}} & 0 \\ \frac{k_2}{2\sqrt{e}} & 0 & 0 & -\frac{k_2(\text{p}-\text{c})}{4\sqrt{e^3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ z \\ n \\ e \end{bmatrix} =$$

$$= 8zc(1-F(z))^2 + 4((\text{k}_1 + k_2)\text{c}^2 F(\text{z}) - (\text{k}_1 + k_2)\text{c}^2 F^2(\text{z}) - 8bc^2 - f(z)cz^2(1-F(z) \le 0$$

با توجه به بررسی موارد عددی با شرط $A < z^* < B$ رابطه (A۲) همواره نامثبت است و ماتریس هیشین نیمه معین منفی می‌باشد.بنابراین با مشتق‌گیری از تابع سود شرایط بهینگی به دست می‌آید.