

یک کاربرد مؤثر از کنترل بهینه کسری در درمان بیماری‌های عفونی

امین جاجرمی و منیژه حسن‌آبادی

جهان، مقالاتی برای افزایش آگاهی جوامع در مورد این بیماری تهیه و تدوین کرده‌اند. به عنوان مثال در [۶] یک مدل همه‌گیر برای بیماری HIV با توجه به نتایج پایداری سراسری به تفصیل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. علاوه بر این، مدل‌های کنترل بهینه، ابزاری قدرتمند برای بررسی رفتار بیماری‌ها هستند و استراتژی‌های مفیدی را برای پیشگیری و کنترل آنها ارائه می‌کنند [۷]. در این راستا، یک مدل ریاضی مبتنی بر کنترل بهینه برای عفونت‌های تنفسی در [۸] پیشنهاد شده است. همچنین یک مدل کنترل بهینه برای اپیدمی ایدز با ردیابی تماس و آزمایش تصادفی در [۹] مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه در [۱۰] نشان داده شده که روش‌های عددی برای کنترل بهینه مدل‌های اپیدمی مؤثر هستند.

در سال‌های اخیر نشان داده شده که مدل‌های کسری برای توصیف حافظه و ویژگی‌های ارثی پدیده‌های طبیعی، دقیق‌تر از معادلات دیفرانسیل معمولی عمل می‌کنند؛ بنابراین استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری، امروزه در بسیاری از زمینه‌های کاربردی و مهندسی رواج یافته است [۱۱] تا [۱۳]. در خصوص حل مسئله کنترل بهینه برای مدل‌های ریاضی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل کسری نیز در چند سال اخیر روش‌های متعددی ارائه شده است. به عنوان مثال کاربردی از موجک‌های تعمیم‌یافته برای حل مسائل کنترل بهینه کسری غیرخطی در [۱۴] استفاده شده است. در [۱۵] یک الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر گرادینت برای کنترل بهینه مدل‌های کسری با قيود مساوی و نامساوی پیشنهاد شده است. استفاده از روش‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری در [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۱۷] مسئله کنترل بهینه برای سیستم‌های کسری با تکنیکی بر پایه آنالیز تابعی و تئوری عملگرها حل شده است. روش تخمینگر-اصلاحگر آدامز نیز برای حل یک مسئله کنترل بهینه کسری کاربردی در [۱۸] مورد توجه قرار گرفته است. با این حال با توجه به موارد واقعی گزارش شده در جهان به نظر می‌رسد تحقیقات بیشتری در زمینه مدل‌سازی کسری و همچنین حل مسائل کنترل بهینه مرتبط با آن مورد نیاز است. با الهام از نکات ذکر شده، هدف این مقاله نشان‌دادن کارایی یک مدل کنترل بهینه کسری جدید برای بیان دینامیک انتقال ایدز (HIV) و کنترل رفتار آن می‌باشد. همچنین یک استراتژی درمانی کارا برای به حداقل رساندن انتقال بیماری از طریق یک فرایند کنترل بهینه پیشنهاد می‌شود. مهم‌ترین نوآوری و دستاوردهای این تحقیق به شرح زیر بیان می‌شوند:

- در این مقاله برای اولین بار از یک نسخه تعمیم‌یافته مشتق کسری با تابع کرنل دلخواه ([۱۹]) برای مدل‌سازی دینامیک انتقال عفونت HIV استفاده می‌شود. در نتیجه این تحقیق، تابع کرنل به عنوان یک درجه آزادی جدید (در کنار پارامتر مرتبه کسری) برای توصیف دقیق‌تر پدیده‌های دنیای واقعی در دسترس خواهد بود.
- تجزیه و تحلیل مدل پیشنهادی به کمک یک نمونه از داده‌های واقعی مربوط به جزایر کیپ‌ورد در بین سال‌های ۱۹۸۷ و ۲۰۱۴

چکیده: در این مقاله، یک مدل کنترل بهینه جدید به کمک نسخه تعمیم‌یافته مشتق کسری با تابع کرنل دلخواه برای بررسی و کنترل بیماری عفونی HIV پیشنهاد می‌شود. بدین طریق یک استراتژی درمانی کارآمد بر اساس نظریه کنترل بهینه کسری برای بیماری ذکر شده تدوین و بررسی می‌شود. شرایط لازم بهینگی بر اساس اصل ماکسیم‌یابی پونترباگین به فرم یک مسئله مقدار مرزی کسری فرموله می‌شود. علاوه بر این، یک روش عددی کارا و مؤثر برای یافتن پاسخ سیستم دینامیکی کسری تعمیم‌یافته و همچنین حل مسئله کنترل بهینه متناظر با آن ارائه می‌شود. همگرایی و تحلیل خطای تکنیک پیشنهادی نیز مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهند که مدل کسری تعمیم‌یافته برای مرتبه کسری ۰.۹۹ دارای خطای کمتر و در نتیجه دقت بهتر در مقایسه با مدل مرتبه صحیح و نیز سایر مراتب کسری آزمایش شده (بر اساس داده‌های واقعی تأیید شده توسط سازمان بهداشت جهانی) می‌باشد. به علاوه اعمال کنترل بهینه پیشنهادی منجر به کاهش قابل توجهی در گسترش بیماری می‌شود؛ در نتیجه مدل کسری معرفی شده ابزاری کارآمد برای نشان دادن ویژگی‌های اساسی انتقال بیماری مفروض بوده و می‌تواند باعث افزایش کارایی استراتژی‌های درمانی شود.

کلیدواژه: دینامیک انتقال عفونت HIV، کنترل بهینه، مشتقات کسری، نتایج عددی.

۱- مقدمه

یکی از خطرناک‌ترین عفونت‌های مسری در جهان، ایدز (HIV) است که به شدت به سیستم ایمنی بدن انسان آسیب می‌رساند. از نخستین باری که در سال ۱۹۸۳ بیماری ایدز شناسایی شد، تعداد افراد آلوده تقریباً ۷۶ میلیون نفر تخمین زده شده بودند که از این تعداد ۳۵ میلیون نفر در نتیجه ایدز، جان خود را از دست دادند. در نتیجه دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰، مبارزه با ایدز به اولویت اصلی سازمان بهداشت جهانی تبدیل شد [۱]. امروزه مرگومیر جهانی ناشی از HIV به دلیل استفاده گسترده از داروهای ضد ویروس به کمترین میزان خود از سال ۱۹۹۴ رسیده است؛ اما مقاومت دارویی می‌تواند تأثیر این روش درمانی را تا حد زیادی محدود سازد. همچنین سال ۲۰۳۰ زمان هدف برای ریشه‌کن شدن ایدز به عنوان خطری جدی برای سلامت عمومی انتخاب شده است [۲].

در طول چند دهه گذشته، استفاده از مدل‌سازی ریاضی برای تجزیه و تحلیل رفتار بسیاری از بیماری‌ها و کنترل آنها بسیار مفید و ارزشمند واقع شده است [۳] تا [۵]. در خصوص HIV، بسیاری از نویسندگان در سرتاسر

این مقاله در تاریخ ۳۱ فروردین ماه ۱۴۰۲ دریافت و در تاریخ ۲ آذر ماه ۱۴۰۲ بازنگری شد.

امین جاجرمی (نویسنده مسئول)، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران، (email: a.jajarmi@ub.ac.ir).
منیژه حسن‌آبادی، گروه ریاضیات کاربردی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران، (email: manijehasanabadi@yahoo.com).

برای ساده‌تر کردن نمادگذاری به کار می‌رود. همچنین اگر $\gamma \notin \mathbb{N}$ باشد، آنگاه n برابر با $\lceil \gamma \rceil + 1$ می‌شود و اگر $\gamma \in \mathbb{N}$ باشد، n برابر با γ است. در حالت خاص برای مقادیر $\gamma \in (0, 1)$ از تعریف ۲-۲ داریم

$${}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} X(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{t_+}^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{-\gamma} \dot{X}(\alpha) d\alpha \quad (4)$$

همچنین برای $\gamma = n \in \mathbb{N}$ ${}^C D_{t_+}^{n; \psi} X(t) = X_{\psi}^{[n]}(t)$ به دست می‌آید. برخی ویژگی‌های بیشتر از عملگرهای ذکر شده در ادامه آمده است. لم ۲-۱ برای $\gamma, \beta > 0$ و $X(t) = (\psi(t) - \psi(t_+))^\beta$ داریم

$$I_{t_+}^{\gamma; \psi} X(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma + \beta)} (\psi(t) - \psi(t_+))^{\gamma + \beta - 1} \quad (5)$$

اثبات) به [۱۹] مراجعه کنید.

قضیه ۲-۱ برای $X \in C^n(J, \mathbb{R})$ و $n - 1 < \gamma < n$ داریم

$$I_{t_+}^{\gamma; \psi} {}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} X(t) = X(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_{\psi}^{[i]}(t_+)}{i!} (\psi(t) - \psi(t_+))^i \quad (6)$$

اثبات) به [۱۹] مراجعه کنید.

علاقه‌مندان برای جزئیات و اطلاعات بیشتر در مورد عملگرهای ψ -ریمن-لیوویل و ψ -کاپوتو می‌توانند به [۱۹] مراجعه کنند.

۳- مدل کنترل بهینه کسری پیشنهادی

در این بخش، یک مدل کنترل بهینه کسری برای به حداقل رساندن انتقال بیماری HIV و همچنین هزینه‌های درمان مربوط ارائه می‌شود. بدین منظور از تابع کنترلی $u_1(t)$ به عنوان یک استراتژی پیشگیری و آموزش برای جلوگیری از ابتلای افراد مستعدی که بیمار نبوده‌اند ولی در معرض ابتلا به بیماری قرار دارند و همچنین کنترل $u_2(t)$ به عنوان درمان افراد مبتلا از طریق داروهای ضد ویروس (ART) HIV استفاده می‌کنیم. در نتیجه مدل انتقال بیماری به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} S(t) = \Lambda - \mu S(t) + \varphi(u_1(t) - 1) \frac{I(t)}{P(t)} S(t) \\ \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} I(t) = -\varphi(u_1(t) - 1) \frac{I(t)}{P(t)} S(t) - (u_2(t) - (u_1(t) - 1)\delta_i + \varphi_i + \mu)I(t) + \delta_c C(t) + \tau A(t) \\ \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} C(t) = (u_2(t) + \varphi_i)I(t) - (\delta_c + \mu)C(t) \\ \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} A(t) = -(u_2(t) - 1)\delta_i I(t) - (\tau + \xi + \mu)A(t) \end{cases} \quad (7)$$

که در آن ${}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} X(t)$ مشتق کسری ψ -کاپوتو برای $\gamma \in (0, 1)$ بوده (رابطه (۴)) و σ پارامتر کمکی برای تطبیق بعد در معادلات دیفرانسیل کسری است [۲۱]. همچنین $S(t)$ نماد جمعیت افراد مستعد و در معرض بیماری می‌باشد و $I(t)$ افراد HIV مثبت بدون علائم بالینی ایدز هستند که می‌توانند بیماری را به دیگران انتقال دهند (ویروس در این افراد زنده و یا در حال توسعه است؛ اما بدون تولید علائم یا تنها با علائم خفیف). $A(t)$ افراد مبتلا به HIV با تظاهرات بالینی ایدز بوده و $C(t)$ افراد HIV مثبتی هستند که درمان ضد ویروس را دریافت کرده و حامل سطح پایینی از ویروس می‌باشند. جمعیت کل در زمان t با نماد

انجام می‌شود [۲۰]. مقایسه نتایج شبیه‌سازی با داده‌های واقعی نشان‌دهنده دقت و کارایی این ساختار جدید مدل‌سازی است. - از دیگر یافته‌های ارزشمند این مقاله، ارائه یک روش عددی کارا و مؤثر برای یافتن پاسخ سیستم‌های دینامیکی کسری با اپراتور مشتق تعمیم‌یافته و نیز حل مسئله کنترل بهینه متناظر با آن است. - اثبات همگرایی و تحلیل خطای روش پیشنهادی نیز در این مقاله مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

با توجه به این ویژگی‌ها معتقدیم که معادلات و روش حل ارائه شده برای آنها در این مقاله هم از لحاظ تئوری و هم از نظر کاربردی جدید بوده و شامل اطلاعات کاملاً متفاوتی نسبت به کارهای مشابه مانند [۳] است.

۲- تعاریف و مقدمات اولیه

در این بخش به بیان تعاریف اولیه برای نسخه تعمیم‌یافته مشتق و انتگرال کسری با تابع کرنل دلخواه می‌پردازیم. بدین منظور در ابتدا انتگرال و مشتق ریمن-لیوویل را با توجه به تابع دلخواه ψ تعریف می‌کنیم. سپس مشتق ψ -کاپوتو را به عنوان نسخه تعمیم‌یافته مشتق ψ -ریمن-لیوویل معرفی می‌نماییم و نهایتاً برخی از ویژگی‌های مفید عملگرهای ψ -ریمن-لیوویل و ψ -کاپوتو را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۲-۱ [۱۹] فرض کنید که $\gamma > 0$ مرتبه کسری، $J = (t_+, t_f)$ یک بازه زمانی (متناهی یا نامتناهی)، X یک تابع انتگرال‌پذیر روی J و $\psi \in C^1(J, \mathbb{R})$ تابعی صعودی باشد؛ به گونه‌ای که برای $t \in J$ ، $\dot{\psi}(t) \neq 0$ است. آنگاه انتگرال کسری γ ام ریمن-لیوویل با توجه به تابع ψ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_{t_+}^{\gamma; \psi} X(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{t_+}^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) X(\alpha) d\alpha \quad (1)$$

مشتق کسری γ ام ریمن-لیوویل نیز با توجه به تابع ψ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} D_{t_+}^{\gamma; \psi} X(t) &= \left(\frac{1}{\dot{\psi}(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{t_+}^{n-\gamma; \psi} X(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \left(\frac{1}{\dot{\psi}(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \times \\ &= \int_{t_+}^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{n-\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) X(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

به طوری که اگر γ عدد طبیعی نباشد، n برابر با $\lceil \gamma \rceil + 1$ است و اگر γ عدد طبیعی باشد، آنگاه n برابر با γ می‌شود.

تعریف ۲-۲ [۱۹] فرض کنید که $\gamma > 0$ مرتبه کسری، $J = (t_+, t_f)$ یک بازه زمانی (متناهی یا نامتناهی)، $X \in C^n(J, \mathbb{R})$ و $n \in \mathbb{N}$ و $\psi \in C^n(J, \mathbb{R})$ تابعی صعودی باشد؛ به گونه‌ای که در بازه J ، $\dot{\psi}(t) \neq 0$ است. در این صورت مشتق کسری γ ام کاپوتو با توجه به تابع ψ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_+}^{\gamma; \psi} X(t) &= I_{t_+}^{n-\gamma; \psi} \left(\frac{1}{\dot{\psi}(t)} \frac{d}{dt} \right)^n X(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \times \int_{t_+}^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{n-\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) X_{\psi}^{[n]}(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن

$$X_{\psi}^{[n]}(t) := \left(\frac{1}{\dot{\psi}(t)} \frac{d}{dt} \right)^n X(t)$$

$$U_\rho = \{(u_1, u_2) : 0 \leq u_1, u_2 \leq 1 - \rho < 1, t \in [0, T]\} \quad (9)$$

تعریف می‌کنیم که در آن $0 < \rho \ll 1$ بوده و T نشان‌دهنده مدت زمان درمان می‌باشد. لازم به ذکر است در شاخص عملکرد (۸) قسمت مربعی $\int_0^T [Q_1 I^\gamma(t) + Q_2 A^\gamma(t)] dt$ تلاش می‌کند تا متغیرهای حالت I و A را تا حد ممکن به مقدار مطلوبشان (مقدار صفر) نزدیک کند. ضرایب Q_1 و Q_2 ثوابتی نامنفی هستند که اهمیت نسبی متغیرهایی I و A را نسبت به همدیگر وزن‌دهی کرده و مقادیر عددی انحراف این متغیرها از مقدار مطلوبشان را نرمالیزه می‌کنند. به عبارت دیگر با تنظیم ضرایب Q_1 و Q_2 می‌توان اهمیت نسبی انحراف هر یک از حالت‌های I و A را از مقدار مطلوبشان وزن‌دهی کرد. به عنوان مثال با افزایش Q_1 در واقع اهمیت بیشتری به انحراف I از مقدار مطلوبش داده می‌شود. همچنین با توجه به اینکه انحراف مثبت و منفی از مقدار صفر به یک اندازه نامطلوب می‌باشد، مربع متغیرهای حالت در شاخص عملکرد (۸) در نظر گرفته شده است. همچنین در خصوص ورودی‌های کنترل در شاخص عملکرد (۸)، عبارت $B_1 u_1^\gamma(t) + B_2 u_2^\gamma(t)$ نرخ هزینه سعی کنترلی $u_i(t)$ را مدل می‌کند و $\int_0^T [B_1 u_1^\gamma(t) + B_2 u_2^\gamma(t)] dt$ تلاش می‌نماید تا هزینه پیشگیری و درمان با کنترل‌های $u_1(t)$ و $u_2(t)$ را به حداقل برساند. به‌علاوه ضرایب B_1 و B_2 ثوابت مثبتی هستند که افزایش هر کدام، جریمه سنگین‌تری بر روی هزینه درمان متناظر قرار می‌دهد. اما از آنجا که در واقعیت اجتناب از تماس بین کل افراد آلوده و جمعیت مستعد و همچنین درمان کل افراد مبتلا غیرممکن است، فرض شده $0 \leq u_1 < 1$ و به‌طور مشابه $0 \leq u_2 < 1$ باشد. بدین ترتیب کنترل‌ها ورودی‌های خود را از بازه $[0, 1) \times [0, 1)$ دریافت می‌کنند. با در نظر گرفتن $u_i \equiv 0$ ، هیچ پیشگیری و درمانی وجود ندارد. برعکس اگر $u_i \equiv 1$ باشد، هر نوع مداخله‌ای ۱۰۰ درصد موفق بوده است؛ اما در واقع این وضعیت به‌طور کلی غیرممکن می‌باشد. زیرا آموزش و درمان کل جامعه به‌دلیل عوامل متعددی مانند کمبود منابع مالی و انسانی امکان‌پذیر نیست و بنابراین زوج کنترل بهینه (u_1^*, u_2^*) باید بر اساس رابطه زیر تعیین شود

$$J_{u_1, u_2}^* = \min_{u_1(\cdot), u_2(\cdot)} \{J_{u_1, u_2} : u_1, u_2 \in U_\rho\} \quad (10)$$

۴- حل مسئله کنترل بهینه کسری

فرض کنید که $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot)) \in U_\rho$ بردار کنترل بهینه و $X^*(\cdot) = (S^*(\cdot), I^*(\cdot), C^*(\cdot), A^*(\cdot))$ مسیر حالت بهینه متناظر باشد. برای حل مسئله کنترل بهینه کسری پیشنهادی، با پیروی از اصل ماکسیم‌یابی پونتریاگین، ابتدا تابع هامیلتونین را به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$H(t) = \frac{1}{\gamma} [Q_1 I^\gamma(t) + Q_2 A^\gamma(t) + B_1 u_1^\gamma(t) + B_2 u_2^\gamma(t)] + \sum_{i=1}^4 \lambda_i(t) f_i(X(t), u(t)) \quad (11)$$

که در آن $X(t) = (S(t), I(t), C(t), A(t))$ و f_i برای $i = 1, 2, 3, 4$ عبارات سمت راست معادلات کسری در سیستم (۷) هستند. همچنین ضرایب $\lambda_i(t)$ برای $i = 1, 2, 3, 4$ ، متغیرهای کمک-حالت بوده که بردار الحاقی $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$ را تشکیل می‌دهند. با دنبال کردن فرایند ارائه‌شده در [۲۳] می‌توان گفت که بردار الحاقی $\lambda(t)$ با شرایط مرزی $\lambda_i(T) = 0$ در معادلات زیر صدق می‌کند

جدول ۱: مقادیر پارامترهای مدل (۷).

پارامتر	مقدار
Λ	۱۰۷۲۴
ϕ	۰٫۸۶۶
ϕ_i	۱
δ_i	۰٫۱
δ_c	۰٫۰۹
μ	۰٫۰۰۱۴۳۸
ξ	۱
τ	۰٫۳۳

$P(t)$ توسط $P(t) = S(t) + I(t) + C(t) + A(t)$ مشخص می‌شود. سایر مفروضات و مفاهیم فیزیکی مدل (۷) نیز به شرح زیر است:
 الف) در این مدل فرض شده که جمعیت افراد مستعد با سرعت Λ افزایش می‌یابد.
 ب) تمام افراد با نرخ ثابت μ در معرض مرگ طبیعی هستند.
 ج) افراد مستعد در برخورد مؤثر با افراد گروه I با نرخ $\lambda = \phi I / P$ به HIV مبتلا می‌شوند که در آن ϕ نرخ تماس مؤثر برای انتقال بیماری است.
 د) افراد HIV مثبت بدون علامت (I) با نرخ ϕ_i به گروه افراد مبتلا به HIV تحت درمان (C) وارد می‌شوند.
 ه) افراد مبتلا به HIV با علائم ایدز (A) با نرخ τ تحت درمان قرار گرفته و وارد کلاس I می‌شوند و تنها در صورت حفظ درمان به کلاس C منتقل می‌شوند.
 و) افراد مبتلا به HIV بدون علائم ایدز (I) که درمان ضد ویروس نمی‌گیرند با نرخ δ_i به کلاس ایدز (A) وارد می‌شوند.
 ز) نرخ درمان ناموفق برای گروه C و ورود این افراد به کلاس I با پارامتر δ_c مشخص می‌شود.
 ح) تنها افراد مبتلا به HIV با علائم ایدز (A) با نرخ ξ از مرگ ناشی از ایدز رنج می‌برند.

مقادیر عددی پارامترهای مدل (۷) در جدول ۱ آمده است. به‌علاوه شرایط اولیه برای این مدل به‌صورت $S(0) > 0$ و $I(0), C(0), A(0) \geq 0$ در نظر گرفته می‌شود.

حال برای بیان مسئله کنترل بهینه کسری به دنبال انتخاب یک شاخص عملکرد مناسب هستیم که نیازهای فیزیکی سیستم را با یک عبارت ریاضی بیان کند. اگر شاخص عملکرد به‌درستی انتخاب شود، آنگاه حداقل‌شدن آن بیانگر عملکرد مطلوب سیستم در بهترین وضعیت خود است [۲۲]؛ بنابراین با توجه به اینکه در این مقاله به دنبال کاهش تعداد افراد با علائم HIV مثبت با تظاهرات بالینی ایدز (A) و افراد آلوده بدون علامت که می‌توانند بیماری را به دیگران انتقال دهند (I) هستیم و مضافاً اینکه می‌خواهیم هزینه‌های درمان ضد ویروس برای افراد مبتلا و همچنین هزینه‌های پیشگیری و آموزش برای جلوگیری از ابتلای افراد مستعد حداقل شود، مسئله کنترل بهینه متناظر را به‌صورت یک مسئله تنظیم‌کننده (حالت خاصی از مسئله ردیابی) به کمک شاخص عملکرد زیر

$$J_{u_1, u_2} = \frac{1}{\gamma} \times \int_0^T [Q_1 I^\gamma(t) + Q_2 A^\gamma(t) + B_1 u_1^\gamma(t) + B_2 u_2^\gamma(t)] dt \quad (12)$$

با توجه به محدودیت‌های دینامیکی (۱)، شرایط اولیه بیان‌شده و مجموعه کنترل قابل قبول

مشتق کسری ψ -کاپوتو از تابع $X(t)$ بوده که در (۳) تعریف شده است، $X_\psi^{[i]}(t)$ برای $i = 0, 1, \dots, n-1$ شرایط اولیه معلوم مسئله بوده و $F(X(t))$ یک تابع برداری پیوسته با مقادیر حقیقی است که شرط لیپ‌شیتس را برآورده می‌کند

$$\|F(X_\psi(t)) - F(X_\psi(t'))\| \leq L \|X_\psi(t) - X_\psi(t')\| \quad (۲۱)$$

حال عملگر انتگرالی (۱) را به دو طرف (۲۰) اعمال می‌کنیم. با در نظر گرفتن (۶) این عمل منجر به معادله زیر می‌شود

$$X(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \psi(\alpha) F(X(\alpha)) d\alpha + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_\psi^{[i]}(t)}{i!} (\psi(t) - \psi(t_i))^i \quad (۲۲)$$

اکنون یک فرایند جانشینی متوالی را اعمال می‌کنیم تا دنباله $\{X_k(t)\}_{k=0}^\infty$ از رابطه زیر تولید شود

$$X_{k+1}(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \psi(\alpha) F(X_k(\alpha)) d\alpha + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_\psi^{[i]}(t)}{i!} (\psi(t) - \psi(t_i))^i \quad (۲۳)$$

در زیربخش بعدی، همگرایی دنباله مذکور به جواب معادله دیفرانسیل کسری (۲۰) را اثبات می‌کنیم.

۱-۵ همگرایی و تحلیل خطا

در این زیربخش برای نشان‌دادن همگرایی و تحلیل خطای روش پیشنهادی (۲۳) قضیه زیر بیان و اثبات می‌شود.

قضیه ۱-۵ دنباله $\{X_k(t)\}_{k=0}^\infty$ که توسط (۲۳) تولید می‌شود به جواب معادله دیفرانسیل کسری (۲۰) به‌طور یکنواخت همگراست. **اثبات** فرض کنید

$$X_\psi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_\psi^{[i]}(t)}{i!} (\psi(t) - \psi(t_i))^i$$

$$m_\psi = \sup_{t, \alpha \in J} \left\| \frac{1}{\Gamma(\gamma)} (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \psi(\alpha) \right\|$$

$$m_F = \sup_{t \in J} \|F(X(t))\|$$

باشد. با استفاده از (۲۳) داریم

$$\|X_\psi(t) - X_\psi(t')\| \leq m_\psi m_F (t - t'), \quad t \in J \quad (۲۴)$$

معادله (۲۳) همچنین نتیجه می‌دهد

$$X_\psi(t) - X_\psi(t') = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \psi(\alpha) \times (F(X_\psi(\alpha)) - F(X_\psi(t'))) d\alpha, \quad t \in J \quad (۲۵)$$

بر اساس (۲۱)، تابع برداری F شرط لیپ‌شیتس (با ثابت لیپ‌شیتس L) را برآورده می‌کند. با توجه به این ویژگی و استفاده از (۲۴)، (۲۵) به معادله زیر منجر می‌شود

$$\|X_\psi(t) - X_\psi(t')\| \leq L m_\psi \int_t^t \|X_\psi(\alpha) - X_\psi(t')\| d\alpha \leq L m_\psi^* m_\psi \frac{(t - t')^\gamma}{\gamma!}, \quad t \in J \quad (۲۶)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{T^-}^{\gamma, \psi} \lambda_1(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial S(t)} \\ \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{T^-}^{\gamma, \psi} \lambda_2(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial I(t)} \\ \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{T^-}^{\gamma, \psi} \lambda_3(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial C(t)} \\ \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} {}^C D_{T^-}^{\gamma, \psi} \lambda_4(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial A(t)} \end{cases} \quad (۱۲)$$

که ${}^C D_{T^-}^{\gamma, \psi} X(t)$ مشتق کسری راست ψ -کاپوتو برای $\gamma \in (0, 1)$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$${}^C D_{T^-}^{\gamma, \psi} X(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_t^T (\psi(\alpha) - \psi(t))^{-\gamma} \dot{X}(\alpha) d\alpha \quad (۱۳)$$

همچنین سیستم کنترلی (۷) را می‌توان با مشتق‌گیری از تابع هامیلتونین (۱۱) نسبت به متغیرهای کمک-حالت به‌دست آورد. برای به‌دست آوردن توابع کنترل بهینه نیز از تابع هامیلتونین نسبت به $u = (u_1, u_2)$ مشتق گرفته می‌شود

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = B_1 u_1 + \frac{\phi I S}{P} (\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad (۱۴)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = B_2 u_2 + (\delta_1 - 1) \lambda_3 I + \lambda_4 I - \delta_1 \lambda_4 I = 0 \quad (۱۵)$$

با حل معادلات بالا داریم

$$u_1(t) = \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) \phi I(t) S(t)}{P(t) B_1} \quad (۱۶)$$

$$u_2(t) = \frac{((1 - \delta_1) \lambda_3(t) - \lambda_4(t) + \delta_1 \lambda_4(t)) I(t)}{B_2} \quad (۱۷)$$

در نهایت با توجه به کران‌داری $u^*(t)$ و شرایط لازم بهینه‌گی، توابع کنترل بهینه را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$u_1^*(t) = \max[\min(1 - \rho, \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) \phi I(t) S(t)}{P(t) B_1}), 0] \quad (۱۸)$$

$$u_2^*(t) = \max[\min(1 - \rho, \frac{(1 - \delta_1) \lambda_3(t) - \lambda_4(t) + \delta_1 \lambda_4(t)}{B_2} I(t)), 0] \quad (۱۹)$$

که در آن $0 < \rho \ll 1$ است.

۵- روش عددی

در این بخش، ابتدا یک مسئله مقدار اولیه شامل مشتق کسری ψ -کاپوتو در نظر گرفته می‌شود و یک روش عددی جدید و کارآمد برای حل آن ارائه می‌شود. سپس همگرایی و تحلیل خطا برای این روش مورد بحث قرار می‌گیرد. نهایتاً این تکنیک برای حل مسئله کنترل بهینه مفروض در این مقاله تعمیم داده می‌شود. بدین منظور ابتدا معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید

$${}^C D_{t_0^+}^{\gamma, \psi} X(t) = F(X(t)), \quad t \in J \quad (۲۰)$$

که در آن $J = (t_0, t_f)$ یک بازه زمانی متناهی یا نامتناهی است، $X \in C^n(J, \mathbb{R})$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است، ${}^C D_{t_0^+}^{\gamma, \psi} X(t)$

$$\|E_{k+1}(t)\| \leq M \frac{L^k (\psi(t) - \psi(t_0))^{k\gamma}}{\Gamma(1+k\gamma)} \quad (33)$$

لازم به ذکر است که سمت راست نامساوی (۳۳)، جمله عمومی سری تابع میتاگ-لفلر $E_{\gamma,\gamma}(L(\psi(t) - \psi(t_0))^\gamma)$ می‌باشد و بنابراین به‌ازای تمام t ‌ها داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L^k (\psi(t) - \psi(t_0))^{k\gamma}}{\Gamma(1+k\gamma)} = 0 \quad (34)$$

در نتیجه با گرفتن حد از طرفین (۳۳) وقتی $k \rightarrow \infty$ به‌دست می‌آوریم $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{k+1}(t) = X(t)$ ، $t \in J$ که نتیجه می‌دهد برای هر $t \in J$ و بنابراین اثبات کامل است. ■

۵-۲- تعمیم به مسئله کنترل بهینه کسری

در این قسمت به تعمیم روش عددی ارائه‌شده در بخش ۵ برای حل مدل کنترل بهینه کسری پیشنهادی (بخش ۳) به کمک یک الگوریتم تکراری پیشرو-پسرو می‌پردازیم. پایداری و همگرایی این الگوریتم نیز در منبع [۲۴] اثبات شده است.

الگوریتم

گام اول یک تابع اولیه برای متغیرهای کنترل در نظر بگیرید.

گام دوم از آخرین مقادیر متغیرهای کنترل در (۷) استفاده کرده و بردار حالت را از سیستم کنترلی (۷) با استفاده از روش پیشنهادی در بخش ۵ به‌صورت پیشرو در زمان محاسبه کنید.

گام سوم از آخرین مقادیر متغیرهای حالت و کنترل در (۱۲) استفاده کرده و بردار کمک-حالت را از سیستم (۱۲) با استفاده از تکنیک ارائه‌شده در بخش ۵ به‌صورت پسرو در زمان به‌دست آورید.

گام چهارم متغیرهای کنترل را از (۱۸) و (۱۹) با کمک آخرین مقادیر به‌دست آمده برای متغیرهای حالت و کمک-حالت به‌روزرسانی کنید.

گام پنجم اگر نسخه به‌روز شده متغیرهای حالت، کمک-حالت و کنترل به مقادیر آنها در تکرار قبلی به اندازه کافی نزدیک است، الگوریتم را متوقف کنید و در غیر این صورت به گام دوم بروید.

۶- بحث و نتایج عددی

در این بخش ابتدا مدل کسری (۷) را بر اساس داده‌های سازمان بهداشت جهانی برای جزایر کیپ‌ورد بین سال‌های ۱۹۸۷ و ۲۰۱۴ تجزیه و تحلیل می‌کنیم [۲۰] و سپس به بررسی اثربخشی استراتژی کنترل بهینه پیشنهادی برای جلوگیری از انتشار بیماری مفروض می‌پردازیم. شکل ۱ رفتار متغیرهای حالت را بدون اعمال کنترل در مدت زمان ۲۰ روز برای مراتب مختلف کسری نشان می‌دهد. در این نمودارها، مقادیر شرایط اولیه $S(0)$ ، $I(0)$ ، $C(0)$ و $A(0)$ به‌ترتیب به‌صورت ۳۳۸۹۲۳، ۶۱ صفر و صفر لحاظ شده‌اند. همچنین تابع ψ در اپراتور مشتق کسری در (۷) به‌صورت $\psi(t) = t$ در نظر گرفته شده است. با توجه به

$$\begin{aligned} \|E_{k+1}(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) \times (F(X(\alpha)) - F(X_k(\alpha))) d\alpha \right\| \leq \\ & \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) \times \|F(X(\alpha)) - F(X_k(\alpha))\| d\alpha \leq \frac{L}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) \times \underbrace{\|X(\alpha) - X_k(\alpha)\|}_{\|E_k(\alpha)\|} d\alpha \quad (30) \\ & \leq M \frac{L}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) d\alpha \leq M \frac{L(\psi(t) - \psi(t_0))^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}, \quad t \in J \end{aligned}$$

در نتیجه به کمک استقرای ریاضی به‌دست می‌آوریم

$$\|X_j(t) - X_{j-1}(t)\| \leq L^{j-1} m_j^j m_\gamma \frac{(t-t_0)^j}{j!}, \quad t \in J \quad (27)$$

نهایتاً با استفاده از نامساوی مثلثی به‌ازای هر i به معادله زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \|X_{k+i}(t) - X_k(t)\| &\leq \frac{m_\gamma}{L} \sum_{j=k+1}^{k+i} (Lm_\gamma)^j \frac{(t-t_0)^j}{j!} \leq \\ & \frac{m_\gamma}{L} (Lm_\gamma)^{k+1} \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!} e^{Lm_\gamma(t-t_0)} \quad (28) \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که دنباله تقریب‌های متوالی $\{X_k(t)\}_{k=0}^\infty$ یک دنباله کوشی در فضای باناخ $C^n(J, \mathbb{R})$ است و بنابراین به‌صورت یکنواخت همگراست. حال با تحلیل خطا نشان می‌دهیم که حد این دنباله، یعنی $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{k+1}(t)$ ، جواب معادله دیفرانسیل کسری (۲۰) است. بدین منظور فرض کنید $X_{k+1}(t)$ جواب k امین مرحله از روش تقریبی (۲۳) باشد که به‌ازای هر t در J پیوسته است. با در نظر گرفتن (۲۲) و (۲۳)، تابع خطای $E_{k+1}(t) = X(t) - X_{k+1}(t)$ را می‌توان به شرح زیر نوشت

$$\begin{aligned} E_{k+1}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) \times \\ & (F(X(\alpha)) - F(X_k(\alpha))) d\alpha, \quad t \in J \quad (29) \end{aligned}$$

از (۲۹) نتیجه می‌شود $E_{k+1}(t) = 0$ و بنابراین $E_{k+1}(t)$ در J پیوسته است. به عبارت دیگر به‌ازای هر $k, t \in J$ داریم $\|E_{k+1}(t)\| < M$ که M عددی ثابت است. همچنین (۲۹)، (۳۰) را نشان می‌دهد. حال با تکرار عملیات انجام‌شده در (۳۰) با در نظر گرفتن نامساوی

$$\|E_k(t)\| \leq M \frac{L(\psi(t) - \psi(t_0))^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}$$

به‌ازای تمام k ‌ها به رابطه زیر می‌رسیم

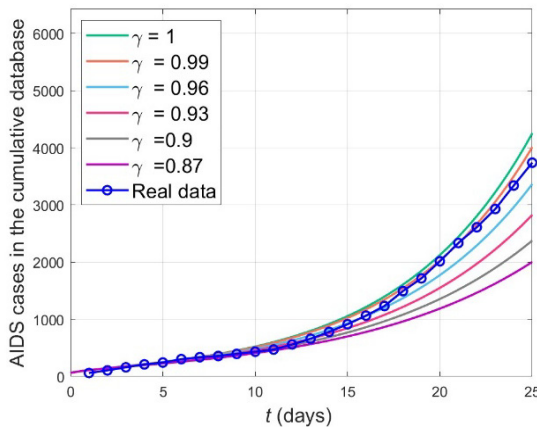
$$\begin{aligned} \|E_{k+1}(t)\| &\leq \frac{L}{\Gamma(\gamma)} \int_t^t (\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) \|E_k(\alpha)\| d\alpha \\ &\leq M \frac{L}{\Gamma(1+\gamma)} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \times \end{aligned} \quad (31)$$

$$\int_t^t (\psi(\alpha) - \psi(t_0))^\gamma \times \frac{(\psi(t) - \psi(\alpha))^{\gamma-1} \dot{\psi}(\alpha) d\alpha}{I_{t_0^+}^{\gamma} (\psi(t) - \psi(t_0))^\gamma}$$

همان‌طور که در بالا اشاره شد، بخش انتگرالی در سمت راست نامساوی (۳۱) انتگرال ψ -ریمن-لیبویل از تابع $(\psi(t) - \psi(t_0))^\gamma$ است. بنابراین با توجه به لم ۱-۲ به‌دست می‌آوریم

$$\|E_{k+1}(t)\| \leq M \frac{L(\psi(t) - \psi(t_0))^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}, \quad t \in J \quad (32)$$

و با k بار تکرار این فرایند ($k = 1, 2, \dots$) خواهیم داشت



شکل ۲: مقایسه پاسخ مدل کسری (γ) بدون کنترل با داده‌های گزارش شده واقعی در جزایر کیپورد.

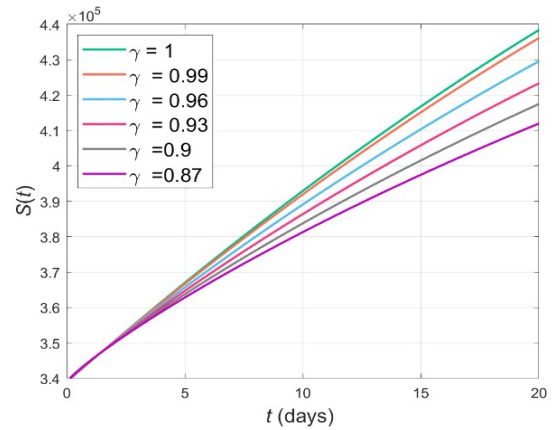
جدول ۲: خطای مطلق و نسبی مدل (γ) در حالت بدون کنترل.

مرتبه کسری	خطای مطلق	خطای نسبی
۱	۶۵۲٫۸	۰٫۱۳۲۰
۰٫۹۹	۳۰۷٫۲	۰٫۰۶۲۱
۰٫۹۶	۷۷۷٫۶	۰٫۱۵۷۲
۰٫۹۳	۱۳۵۷٫۳	۰٫۲۷۴۴
۰٫۹	۱۹۷۴٫۸	۰٫۳۹۹۳
۰٫۸۷	۲۴۸۱٫۵	۰٫۵۰۱۷

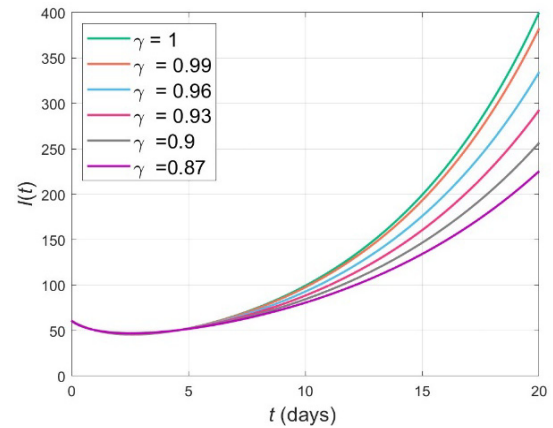
شکل ۱ مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقدار مرتبه کسری γ به ۱، تمام متغیرهای حالت سیستم کسری به متغیرهای حالت متناظر در مدل مرتبه صحیح میل می‌کنند که این مطلب، تأییدی بر صحت نتایج ارائه شده برای مشتقات مرتبه کسری است.

در ادامه، دقت و کارایی مدل کسری پیشنهادی از طریق یک مطالعه موردی در جدول ۲ و شکل ۲ بر اساس داده‌های گزارش شده واقعی توسط سازمان بهداشت جهانی [۲۰] برای حالت بدون کنترل تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن خطای مطلق و نسبی به عنوان معیار دقت در این مقاله، مقایسه نتایج ارائه شده در جدول ۲ و شکل ۲ نشان می‌دهد که مدل کسری پیشنهادی برای مرتبه کسری ۰٫۹۹ دارای خطای مطلق و نسبی کمتر و در نتیجه دقت بالاتری نسبت به مدل مرتبه صحیح و همچنین سایر مراتب کسری آزمایش شده می‌باشد. علاوه بر این، جدول ۲ رفتار تغییرات خطا نسبت به پارامتر مرتبه کسری را نیز به تصویر می‌کشد. بررسی اطلاعات موجود در جدول ۲ نشان می‌دهد که تغییرات یک درصدی در اندازه مرتبه کسری منجر به تغییرات پنجاه درصدی در میزان خطا شده و بر این اساس به نظر می‌رسد که حساسیت مدل پیشنهادی نسبت به عدد مرتبه کسری برای بیماری عفونی تحت بررسی بالاست؛ مسئله‌ای که می‌تواند منجر به کاهش دقت این ساختار در شرایط وجود عدم قطعیت شود.

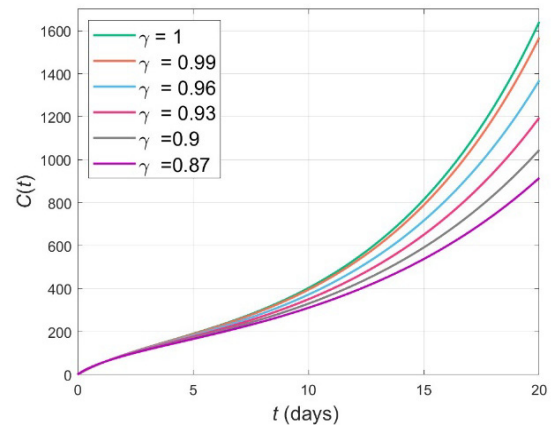
نهایتاً برای بررسی استراتژی کنترلی پیشنهادی و با توجه به شاخص عملکرد (۸)، ضرایب هزینه Q_1 ، Q_2 ، B_1 و B_2 به ترتیب به صورت ۵، ۵، ۳ و ۲ در نظر گرفته می‌شوند. شکل ۳ رفتار متغیرهای حالت را در مدت زمان ۲۰ روز بدون اعمال کنترل و با وجود آن برای مدل مرتبه کسری با γ برابر ۰٫۹۹ (نزدیک‌ترین وضعیت به فیزیک و واقعیت مسئله بر اساس نتایج جدول ۲ و شکل ۲) به تصویر می‌کشد. با توجه به شکل‌های ۳-ج، ۳-د، ۳-ز و ۳-ح مشاهده می‌شود که با اعمال کنترل، تعداد مبتلایان به HIV که بدون علامت بوده ولی می‌توانند بیماری را به دیگران انتقال



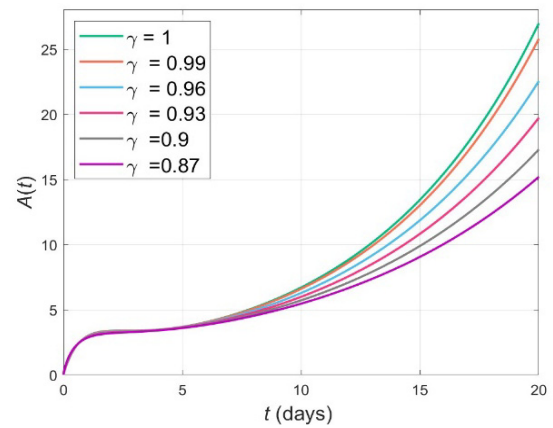
(الف)



(ب)

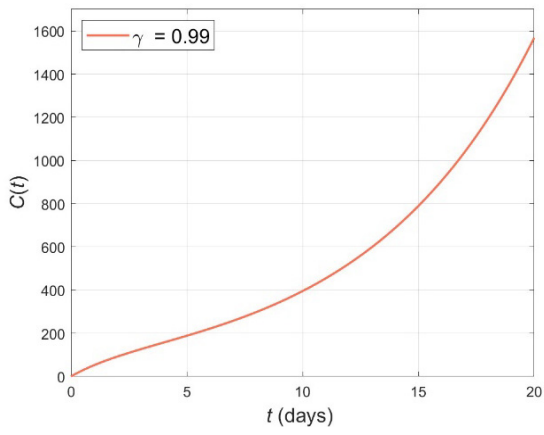


(ج)

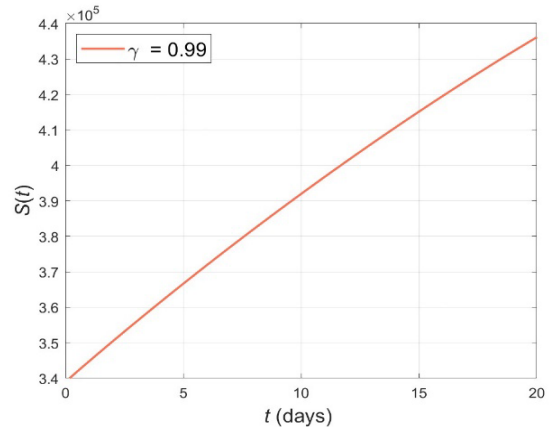


(د)

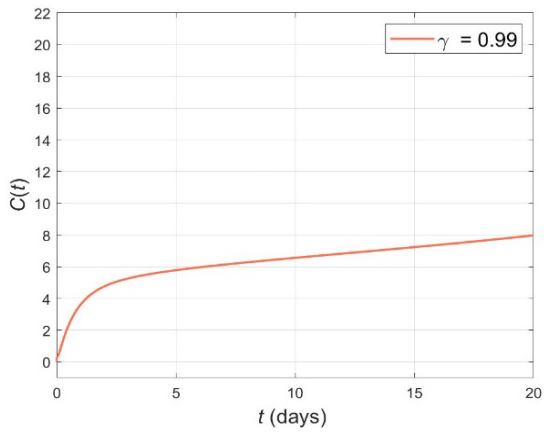
شکل ۱: رفتار متغیرهای حالت مدل کسری (γ) بدون کنترل برای مراتب مختلف کسری، (الف) رفتار متغیر حالت $S(t)$ ، (ب) رفتار متغیر حالت $I(t)$ ، (ج) رفتار متغیر حالت $C(t)$ و (د) رفتار متغیر حالت $A(t)$.



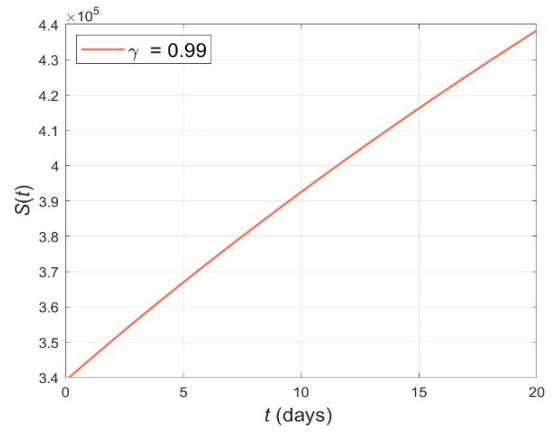
(ا)



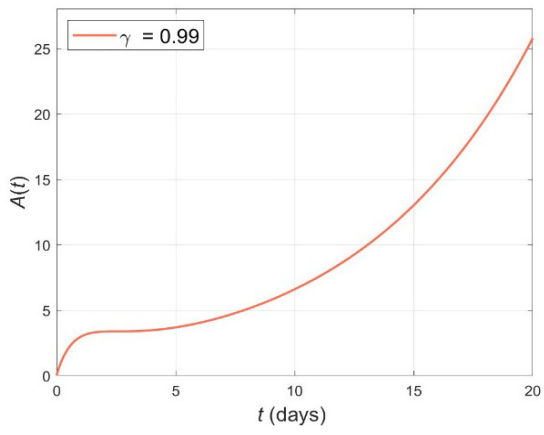
(ب)



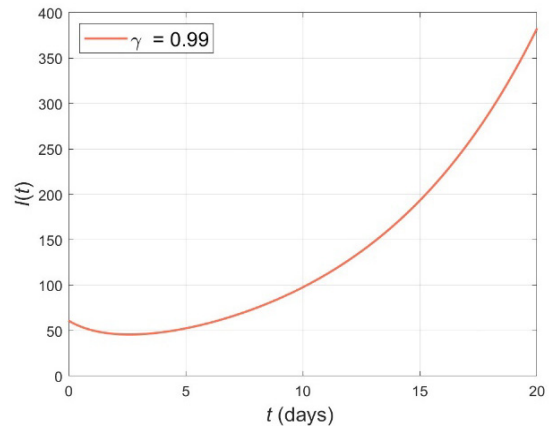
(ج)



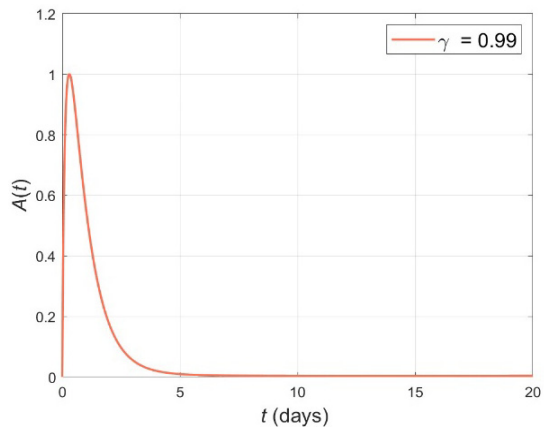
(د)



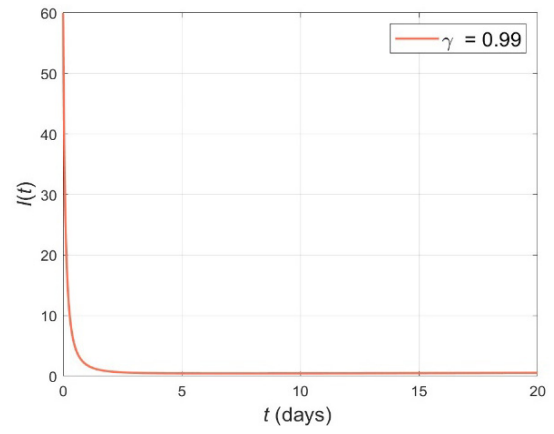
(ه)



(و)



(ز)



(ح)

شکل ۳: رفتار متغیرهای حالت قبل و بعد از اعمال کنترل برای مرتبه کسری ۰.۹۹ (نزدیک‌ترین وضعیت به فیزیک و واقعیت مسئله)، (الف) رفتار متغیر حالت $S(t)$ قبل از اعمال کنترل، (ب) رفتار متغیر حالت $S(t)$ بعد از اعمال کنترل، (ج) رفتار متغیر حالت $I(t)$ قبل از اعمال کنترل، (د) رفتار متغیر حالت $I(t)$ بعد از اعمال کنترل، (ه) رفتار متغیر حالت $C(t)$ قبل از اعمال کنترل، (و) رفتار متغیر حالت $C(t)$ بعد از اعمال کنترل، (ز) رفتار متغیر حالت $A(t)$ قبل از اعمال کنترل و (ح) رفتار متغیر حالت $A(t)$ بعد از اعمال کنترل.

- [7] A. Jajarmi, A. Yusuf, D. Baleanu, and M. Inc, "A new fractional HRSV model and its optimal control: a non-singular operator approach," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 547, Article ID: 123860, Jun. 2020.
- [8] S. Rosa and D. F. M. Torres, "Optimal control of a fractional order epidemic model with application to human respiratory syncytial virus infection," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 117, pp. 142-149, Dec. 2018.
- [9] H. Kheiri and M. Jafari, "Fractional optimal control of an HIV/AIDS epidemic model with random testing and contact tracing," *J. of Applied Mathematics and Computing*, vol. 60, pp. 387-411, 2019.
- [10] C. Campos, C. J. Silva, and D. F. M. Torres, "Numerical optimal control of HIV transmission in Octave/MATLAB," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 25, no. 1, Article ID: 1, 2019.
- [11] P. Agarwal, D. Baleanu, Y. Chen, S. Momani, and J. A. T. Machado, *Proc. Fractional Calculus: ICFDA 2018*, Amman, Jordan, 16-18 Jul. 2019.
- [12] A. Boukhouima, et al., "Stability analysis and optimal control of a fractional HIV/AIDS epidemic model with memory and general incidence rate," *The European Physical J. Plus*, vol. 136, Article ID: 103, 2021.
- [13] A. Jajarmi, D. Baleanu, S. S. Sajjadi, and J. J. Nieto, "Analysis and some applications of a regularized Ψ -Hilfer fractional derivative," *J. of Computational and Applied Mathematics*, vol. 415, Article ID: 114476, 2022.
- [14] S. Sabermahani, Y. Ordokhani, and P. Rahimkhani, "Application of generalized Lucas wavelet method for solving nonlinear fractal-fractional optimal control problems," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 170, Article ID: 113348, May 2023.
- [15] C. Liu, C. Yu, Z. Gong, H. T. Cheong, and K. L. Teo, "Numerical computation of optimal control problems with Atangana-Baleanu fractional derivatives," *J. of Optimization Theory and Applications*, vol. 197, no. 2, pp. 798-816, May 2023.
- [16] F. Kheyrintaj, A. Nazemi, and M. Mortezaee, "Solving time delay fractional optimal control problems via a Gudermannian neural network and convergence results," *Network: Computation in Neural Systems*, vol. 34, no. 1-2, pp. 122-150, Feb. 2023.
- [17] M. Vellappandi and V. Govindaraj, "Operator theoretic approach to optimal control problems characterized by the Caputo fractional differential equations," *Results in Control and Optimization*, vol. 10, Article ID: 100194, Mar. 2023.
- [18] C. Liu, W. Sun, and X. Yi, "Optimal control of a fractional smoking system," *J. of Industrial and Management Optimization*, vol. 19, no. 4, pp. 2936-2954, Apr. 2023.
- [19] R. Almeida, "A caputo fractional derivative of a function with respect to another function," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 44, pp. 460-481, Mar. 2017.
- [20] República de Cabo Verde. *Rapport de progrès sur la riposte au SIDA au Cabo Verde-2015*, Comitéde Coordenação ao do Combate a Sida; 2015.
- [21] J. F. Gómez-Aguilar, J. J. Rosales-García, J. J. Bernal-Alvarado, T. Córdova-Fraga, and R. Guzmán-Cabrera, "Fractional mechanical oscillators," *Revista Mexicana de Física*, vol. 58, no. 4, pp. 348-352, Aug. 2012.
- [22] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, New Jersey: Prentice-Hall, 1970.
- [23] A. Jajarmi and D. Baleanu, "On the fractional optimal control problems with a general derivative operator," *Asian J. of Control*, vol. 23, no. 2, pp. 1062-1071, 2021.
- [24] W. Hackbush, "A numerical method for solving parabolic equations with opposite orientations," *Computing*, vol. 20, pp. 229-240, Sept. 1978.

امین جاجرمی در سال‌های ۱۳۸۴ و ۱۳۸۶ مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی برق خود را از دانشگاه فردوسی مشهد دریافت نمود، پس از آن به دوره‌ی دکترای مهندسی برق در دانشگاه فردوسی مشهد وارد گردید و در سال ۱۳۹۱ موفق به اخذ درجه‌ی دکترا در مهندسی برق از دانشگاه مذکور شد. دکتر جاجرمی از سال ۱۳۹۱ در گروه مهندسی برق دانشکده‌ی فنی و مهندسی دانشگاه بجنورد در بجنورد مشغول به فعالیت گردید و اینک نیز عضو هیأت علمی این گروه می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه‌ی نام‌برده شامل موضوعاتی مانند بهینه‌سازی و کنترل بهینه، ریاضیات کسری و مدل‌سازی سیستم‌های دنیای واقعی می‌باشد.

منیژه حسن‌آبادی در سال ۱۳۸۵ مدرک کارشناسی ریاضی محض خود را از دانشگاه گیلان و در سال ۱۳۹۱ مدرک کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات خود را از دانشگاه دامغان دریافت نمود، پس از آن به دوره‌ی دکترای ریاضی

دهند $(I(t))$ و تعداد مبتلایان با علائم HIV مثبت و تظاهرات بالینی ایدز $(A(t))$ به‌سرعت کاهش می‌یابد و در صورت عدم کنترل، وضعیت برعکس می‌شود. در نتیجه یافته‌های عددی در این شکل نشان می‌دهد روش کنترل بهینه مورد استفاده برای جلوگیری از انتشار بیماری مفروض با حداقل هزینه درمان کارا و مؤثر بوده است.

۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک مدل کنترل بهینه جدید بر اساس نسخه تعمیم‌یافته مشتق کسری با تابع کرنل دلخواه برای توصیف و کنترل انتقال عفونت HIV معرفی شد. همچنین یک روش عددی کارا و مؤثر برای یافتن پاسخ سیستم کسری تعمیم‌یافته و همچنین حل مسئله کنترل بهینه متناظر با آن ارائه گردید. اثبات همگرایی و تحلیل خطای روش پیشنهادی نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفت. علاوه بر این، مسئله کنترل بهینه کسری به‌عنوان یک استراتژی درمان حل شد و نتایج عددی متناظر برای نزدیک‌ترین حالت به فیزیک و واقعیت مسئله رسم و تحلیل شدند. مقایسه نتایج نشان داد که مدل‌سازی ارائه‌شده با مرتبه کسری ۰٫۹۹ دارای دقت بالاتری نسبت به مدل مرتبه صحیح و نیز سایر مراتب کسری آزمایش‌شده بر اساس داده‌های واقعی تأییدشده توسط سازمان بهداشت جهانی است. به‌علاوه روش کنترل بهینه مورد استفاده نیز برای جلوگیری از انتشار بیماری مفروض با حداقل هزینه‌های درمان کارا و مؤثر بوده است. در نتیجه، این تحقیق نشان داد دستگاه معادلات کسری، کیفیت مدل‌سازی را بهبود می‌بخشد و مسئله کنترل بهینه کسری نیز عملکرد خوبی در کنترل بیماری دارد. بنابراین به‌عنوان نتیجه‌ای مهم، یافته‌های ما می‌تواند برای ریشه‌کن کردن بیماری ایدز در یک بازه زمانی قابل قبول مورد توجه و استفاده قرار گیرد. با وجود این، یافتن دقیق‌ترین مدل کسری در این مقاله نیازمند حل یک مسئله بهینه‌سازی برای تعیین تابع کرنل مجهول و نیز یافتن پارامتر کسری نامعلوم است؛ مسئله‌ای که حل آن چالش‌برانگیز بوده و پیشنهاد الگوریتم‌های بهینه‌سازی مناسب برای غلبه بر آن می‌تواند به‌عنوان کارهای آتی مورد توجه محققین قرار گیرد. همچنین بر اساس اطلاعات جدول ۲ به نظر رسید که حساسیت مدل نسبت به عدد مرتبه کسری برای بیماری عفونی تحت بررسی بالاست که این مسئله می‌تواند منجر به کاهش دقت آن در شرایط وجود عدم قطعیت شود. در نتیجه، یافتن راهکارهایی برای بهبود کارایی مدل پیشنهادی با وجود عدم قطعیت نیز می‌تواند برای تحقیقات پیش رو مد نظر قرار گیرد.

مراجع

- [1] World Health Organization (WHO), *HIV and AIDS*, <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/hiv-aids>.
- [2] UNAIDS: Fast-Track-Ending the AIDS Epidemic by 2030. <http://www.unaids.org>.
- [3] N. H. Sweilam, S. M. Al-Mekhlafi, and D. Baleanu, "Optimal control for a fractional tuberculosis infection model including the impact of diabetes and resistant strains," *J. of Advanced Research*, vol. 17, pp. 125-137, May 2019.
- [4] D. Kumar, J. Singh, M. Al Qurashi, and D. Baleanu, "A new fractional SIRS-SI malaria disease model with application of vaccines, antimalarial drugs, and spraying," *Advances in Difference Equations*, vol. 2019, Article ID: 278, Jul. 2019.
- [5] M. A. Khan, Z. Hammouch, and D. Baleanu, "Modeling the dynamics of hepatitis E via the Caputo-Fabrizio derivative," *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 14, no. 3, Article ID: 311, Apr. 2019.
- [6] C. J. Silva and D. F. Torres, "A SICA compartmental model in epidemiology with application to HIV/AIDS in Cape Verde," *Ecological Complexity*, vol. 13, pp. 70-75, Jun. 2017.

کاربرد گرایش تحقیق در عملیات و کنترل بهینه در دانشگاه بیرجند وارد گردید و در سال ۱۳۹۸ موفق به اخذ درجهی دکترا در رشتهی ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات و کنترل بهینه از دانشگاه مذکور شد. زمینههای علمی مورد علاقهی نامبرده شامل موضوعاتی مانند کنترل بهینه، حساب دیفرانسیل کسری، بیولوژی و الگوریتمهای تکاملی می باشد.