

# کران بالا و پایین توان ICI در سیستم FrFT-OFDM

## در کانال فرکانس گزین متغیر با زمان

زهرا مختاری و مریم صباغیان

می‌شود. در ادامه این مقاله از FT-OFDM برای سیستم OFDM قدیمی و FrFT-OFDM برای سیستم جدید استفاده می‌کنیم. FrFT با زاویه  $\alpha$  معادل با چرخش  $\alpha$  درجه پادساعت‌گرد در صفحه زمان-فرکانس است که در حالت  $\alpha = \pi/2$  به تبدیل فوری عادی تبدیل می‌شود. بنابراین FrFT-OFDM را می‌توان سیستم چندحاملی تعمیم‌یافته  $^{\alpha}$ (GMC) معرفی شده در [۴] دانست که سیستم‌های FT-OFDM و تک‌حامل<sup>۱</sup> حالت‌های خاص آن به ترتیب به ازای  $\alpha = \pi/2$  و  $\alpha = 0$  هستند. برای پیاده‌سازی FrFT، فرم‌های گسسته مختلفی پیشنهاد شده است [۵] و [۶]. با به وجود آمدن الگوریتم‌های سریع برای پیاده‌سازی FrFT، سیستم FT-OFDM و FrFT-OFDM دارای پیچیدگی محاسباتی یکسانی هستند [۷].

در این مقاله هدف ما آسان کردن بررسی اثر فرکانس داپلر و زاویه تبدیل FrFT بر توان ICI در سیستم FrFT-OFDM در حضور کانال فرکانس گزین متغیر با زمان است. همان‌طور که در توضیح مدل سیستم بیان خواهد شد، عبارت دقیق توان تداخل بسیار پیچیده است و دید مناسبی از تأثیر این پارامترها بر توان تداخل نمی‌دهد [۸]. به همین دلیل در این مقاله به ارائه کران بالا و پایین برای توان ICI می‌پردازیم. این کران‌ها بسیار ساده‌تر از مقدار دقیق توان ICI هستند به طوری که می‌توان به وسیله آنها توان تداخل را با تابع چندجمله‌ای از فرکانس داپلر و  $\cot \alpha$  تخمین زد. کران‌های به دست آمده به مقدار واقعی نزدیک هستند و به خوبی می‌توانند  $\alpha$  را که در آن توان ICI مینیمم می‌شود نشان دهند. همچنین بررسی‌ها تأیید می‌کنند که در کانال‌های مستقل از زمان  $\alpha = \pi/2$  بهینه است و در کانال‌های تخت هر دو سیستم FT-OFDM و FrFT-OFDM دارای عملکرد یکسانی هستند. ولی در کانال‌های فرکانس گزین متغیر با زمان سیستم FrFT-OFDM با زاویه بهینه دارای عملکرد بهتری است.

### ۲- تبدیل فوری کسری

تبدیل فوری عادی معادل چرخش پادساعت‌گرد در صفحه زمان-فرکانس است. با این دیدگاه، همچنان که در شکل ۱ نشان داده شده است، تبدیل فوری کسری معادل با چرخش  $\alpha$  درجه پادساعت‌گرد در این صفحه است که در حالت  $\alpha = \pi/2$  به تبدیل فوری عادی تبدیل می‌شود [۹].

تبدیل فوری کسری پیوسته با زاویه  $\alpha$  تابع  $s(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_{\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha}(f, t) s(t) dt \quad (1)$$

چکیده: در این مقاله توان تداخل بین زیرحامل‌ها (ICI) در سیستم مدولاسیون تقسیم فرکانس متعامد بر اساس تبدیل فوری کسری (FrFT-OFDM) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین به ارائه کران‌های بالا و پایین دقیق برای توان ICI در سیستم FrFT-OFDM در کانال فرکانس گزین متغیر با زمان پرداخته شده است. کران‌های به دست آمده دارای عبارات بسیار ساده‌تری نسبت به مقدار دقیق توان ICI هستند و بنابراین دید بهتری نسبت به تأثیر پارامترهایی همچون فرکانس داپلر، زمان سمبل، تأخیر کانال و زاویه تبدیل FrFT بر ICI می‌دهند. بررسی‌ها در این مقاله تأیید می‌کنند که در کانال‌های تخت عملکرد دو سیستم مدولاسیون تقسیم فرکانس متعامد بر اساس تبدیل فوری (FrFT-OFDM) و FrFT-OFDM یکسان است و در حضور کانال‌های فرکانس گزین متغیر با زمان، با انتخاب زاویه تبدیل مناسب، عملکرد سیستم FrFT-OFDM از سیستم تک‌حامل FT-OFDM بسیار بهتر است.

کلیدواژه: مدولاسیون تقسیم فرکانس متعامد، تداخل بین زیرحامل‌ها، تبدیل فوری کسری، کانال فرکانس گزین متغیر با زمان.

### ۱- مقدمه

مدولاسیون تقسیم فرکانس<sup>۱</sup> (OFDM) یک روش ارسال چندحاملی<sup>۲</sup> است که در آن داده‌ها به صورت موازی توسط حامل‌های متعامد ارسال می‌شوند. این تعامد حامل‌ها توانایی مقابله با فرکانس‌گزینی کانال را فراهم می‌سازد اما این سیستم زمانی که تغییرات زمانی کانال شدید است، به دلیل به وجود آمدن تداخل بین زیرحامل‌ها<sup>۳</sup> (ICI) عملکرد خوب خود را از دست می‌دهد [۱] و [۲]. مرجع [۳] برای مقابله با این مشکل، یک سیستم چندحاملی جدید معرفی کرده است که در کانال‌های فرکانس گزین متغیر با زمان دارای عملکرد بهتری نسبت به سیستم OFDM است. در سیستم جدید، توابع پایه نمایی با توابع پایه chirp متعامد با نرخ  $-\cot \alpha$  جایگزین می‌شوند. بنابراین فرکانس حامل‌ها با نرخ  $\cot \alpha$  با زمان تغییر می‌کنند. این سیستم مشابه با سیستم OFDM است با این تفاوت که به جای بلاک‌های تبدیل فوری سریع<sup>۴</sup> (FFT) و عکس آن<sup>۵</sup> (IFFT) از تبدیل فوری کسری<sup>۶</sup> (FrFT) و عکس آن<sup>۷</sup> (IFrFT) استفاده

این مقاله در تاریخ ۱۲ خرداد ماه ۱۳۹۳ دریافت و در تاریخ ۳۱ خرداد ماه ۱۳۹۴ بازنگری شد.

زهرا مختاری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، (email: z.mokhtari@ut.ac.ir).

مریم صباغیان، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، (email: msabbaghian@ut.ac.ir).

1. Orthogonal Frequency Division Multiplexing
2. Multi Carrier
3. Inter Carrier Interference
4. Fast Fourier Transform
5. Inverse Fast Fourier Transform
6. Fractional Fourier Transform

7. Inverse Fractional Fourier Transform
8. Generalized Multi Carrier
9. Single Carrier

### ۳- مدل سیستم

در سیستم FrFT-OFDM بلاک‌های FFT و IFFT موجود در سیستم OFDM به ترتیب با بلاک‌های FrFT و IFrFT جایگزین می‌شوند. با فرض این که داده‌ها در حوزه FrFT به صورت بردار  $d$  باشند و با توجه به رابطه عکس تبدیل فوریه کسری، سیگنال ارسالی در حوزه زمان را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۱]

$$x(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d(k) \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{T}} \exp\left(-\frac{j t^2 \cot \alpha}{2}\right) \times \exp\left(\frac{-j}{2} \left(\frac{2\pi \sin \alpha}{T}\right)^2 k^2 \cot \alpha\right) \exp\left(\frac{j 2\pi k t}{T}\right) \quad (5)$$

که  $N$ ،  $T$  و  $d(k)$  به ترتیب طول بلاک، زمان سمبل FrFT-OFDM و داده زیرحامل  $k$  ام هستند.  $0 < \alpha < \pi$  زاویه تبدیل فوریه کسری است. در اینجا فرض می‌کنیم که یک کانال چندمسیره متغیر با زمان داریم که هر مسیر دارای فرکانس داپلر متفاوتی است و برای مدل کردن تغییرات زمانی آن از مدل Jakes<sup>۲</sup> استفاده می‌کنیم. سیگنال دریافتی پس از عبور از کانال برابر است با

$$y(t) = \sum_i h_i(t) x(t - \tau_i) \exp(-j 2\pi f_i t) \quad (6)$$

که در آن  $\tau_i$  و  $f_i$  به ترتیب تأخیر و فرکانس داپلر مسیر  $i$  ام هستند. تابع همبستگی مسیر  $i$  ام و مسیر  $l$  ام در فواصل زمانی  $\tau$  برابر است با

$$r_{i,j}(\tau) = E(h_i(t+\tau)h_j^*(t)) = \sigma_i^2 J_0(2\pi f_d \tau) \delta(i-j) \quad (7)$$

که  $f_d$  ماکسیمم فرکانس داپلر،  $\sigma_i^2$  توان مسیر  $i$  ام،  $J_0(\cdot)$  تابع بسل درجه صفرم نوع اول<sup>۳</sup> و نیز  $\delta(\cdot)$  تابع ضربه و  $E\{\cdot\}$  تابع میانگین است.

در گیرنده<sup>۴</sup>، داده‌های دریافتی پس از تبدیل فوریه کسری برابری

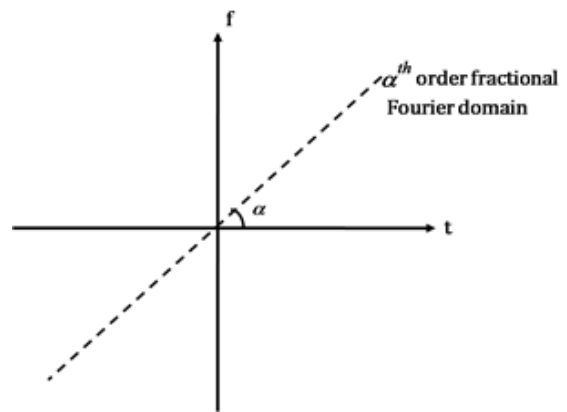
$$\hat{d}(m) = \int_{-T}^T y(t) \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{T}} \exp\left(\frac{j t^2 \cot \alpha}{2}\right) \times \exp\left(\frac{j}{2} \left(\frac{2\pi \sin \alpha}{T}\right)^2 m^2 \cot \alpha\right) \exp\left(\frac{-j 2\pi m t}{T}\right) dt \quad (8)$$

### ۴- مقدار دقیق ICI در سیستم FRFT-OFDM

با قراردادن (۵) و (۶) در (۸) داریم

$$\hat{d}(m) = \frac{1}{T} \sum_k d(k) \times \sum_i \exp\left(\left(\frac{-j 2\pi \sin \alpha}{2T}\right)^2 (k^2 - m^2) \cot \alpha\right) \times \exp\left(\frac{-j 2\pi k \tau_i}{T}\right) \exp\left(\frac{-j \tau_i^2 \cot \alpha}{2}\right) \times \int_{-T}^T h_i(t) \exp\left(j \left(\frac{2\pi(k-m)}{T} + \tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i\right) t\right) dt \quad (9)$$

با توجه به عبارت بالا متوجه می‌شویم که سیگنال دریافتی از دو بخش سیگنال اصلی و ICI تشکیل شده است (فرض می‌کنیم که پیشوند گردشی به اندازه‌ای است که ISI را کاملاً حذف می‌کند). بنابراین می‌توان داده‌های دریافتی را به صورت زیر نوشت



شکل ۱: چرخش سیگنال به اندازه  $\alpha$  درجه در جهت پادساعت‌گرد در صفحه زمان-فرکانس.

که در FrFT،  $K_\alpha(f, t)$  مطابق زیر است [۱۰]

$$K_\alpha(f, t) = \begin{cases} C_\alpha \exp\left\{-\frac{j f t}{\sin \alpha} + \frac{j}{2} (t^2 + f^2) \cot \alpha\right\}, & \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \delta(f-t), & \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \delta(f+t), & \alpha = \pi k + \pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

که در آن داریم  $C_\alpha = \sqrt{(1-j \cot \alpha)/2\pi}$  و  $\alpha = (\pi/2)a$  مناسب برای سیگنال‌هایی هستند که در یک بازه زمانی خاص فرکانس‌های مختلف را با نرخ مشخص، جارو می‌کنند. با مقایسه روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت که در تبدیل فوریه کسری به جای استفاده از توابع پایه نمایی از توابع پایه chirp استفاده می‌شود. به این ترتیب، تبدیل فوریه عادی حالت خاص تبدیل فوریه کسری است که در حالت  $a = 1$  که معادل  $\alpha = \pi/2$  است به دست می‌آید.

برای FrFT فرم‌های گسسته زیادی مطرح شده است که در اینجا پرکاربردترین و معروف‌ترین آنها را بیان می‌کنیم. تبدیل فوریه کسری گسسته با زاویه  $\alpha$  تابع  $s(n)$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]

$$S_\alpha(m) = \sqrt{\frac{|\sin \alpha| - j \operatorname{sgn}(\sin \alpha) \cos \alpha}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha m^2 \Delta u} \times \sum_{n=-N}^N e^{-\frac{j \operatorname{sgn}(\sin \alpha) 2\pi m n}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha n^2 \Delta t} s(n), \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

در (۳)  $\Delta t$  و  $\Delta u$  به ترتیب فاصله نمونه‌برداری در حوزه زمان و حوزه FrFT،  $2M+1$  و  $2N+1$  به ترتیب تعداد نمونه‌ها در زمان و حوزه  $\operatorname{sgn}(x)$  و FrFT تابع علامت است. عبارت بالا برای  $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$  صادق است. در حالت  $\alpha = 2k\pi$  و  $\alpha = (2k+1)\pi$  برای  $k \in \mathbb{Z}$  به ترتیب داریم  $S_\alpha(m) = s(-m)$  و  $S_\alpha(m) = s(m)$ .

برای این که تبدیل دارای خاصیت یکانی و معکوس‌پذیری باشد باید رابطه زیر بین  $\Delta t$  و  $\Delta u$  برقرار باشد

$$\Delta t \Delta u = \frac{2\pi}{2M+1} |\sin \alpha| \quad (4)$$

عکس تبدیل فوریه کسری پیوسته و گسسته به ترتیب با جاگذاری  $-\alpha$  در (۲) و (۳) به دست می‌آیند.

2. Jakes Model

3. Zero Order Bessel Function of the First Kind

4. Receiver

1. Sweep

$$1 - \frac{\theta^r}{2} \leq \cos \theta \leq 1 - \frac{\theta^r}{2} + \frac{\theta^r}{2^2} \quad (17)$$

کران بالا و پایین توان ICI برابر است با

$$P_{ICI} \leq 1 + \sum_i \sigma_i^r \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-v) \left[ \frac{1}{2} r(Tv) ((\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)Tv)^r + \frac{1}{2^2} \times \right. \\ \left. (1-r(Tv)) ((\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)Tv)^r - r(Tv) \right] dv \quad (18)$$

$$P_{ICI} \geq 1 + \sum_i \sigma_i^r \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-v) \left[ -\frac{1}{2^2} ((\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)Tv)^r + \right. \\ \left. r(Tv) \left( \frac{1}{2} ((\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)Tv)^r - 1 \right) \right] dv \quad (19)$$

با توجه به [۱۲] در مدل Jakes داریم

$$1 - \frac{1}{4} (2\pi f_d Tv)^r \leq r(Tv) \leq \quad (20)$$

$$1 - \frac{1}{4} (2\pi f_d Tv)^r + \frac{1}{64} (\tau_i T \cot \alpha v)^r$$

با اعمال این کران‌ها به  $r(Tx)$  داریم

$$P_{ICI} \leq \frac{1}{2^2} (2\pi f_d T)^r + \frac{T^r}{12} \left( 1 - \frac{1}{10} (2\pi f_d T)^r + \right. \\ \left. \frac{1}{2^2} (2\pi f_d T)^r \right) \times \sum_i \sigma_i^r (\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)^r + \quad (21)$$

$$\frac{T^r}{2^6 \times 88} (2\pi f_d T)^r \sum_i \sigma_i^r (\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)^r$$

$$P_{ICI} \geq \frac{1}{2^2} (2\pi f_d T)^r - \frac{1}{96} (2\pi f_d T)^r + \quad (22)$$

$$\frac{T^r}{36} \sum_i \sigma_i^r (\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)^r$$

با توجه به (۲۱) و (۲۲) مشاهده می‌شود که کران‌های به دست آمده برای توان تداخل بین زیرکانال‌ها به ازای فرکانس‌های داپلر ثابت، یک تابع چندجمله‌ای از  $\cot \alpha$  هستند. همچنین این کران‌ها برای یک  $\alpha$  ثابت، یک تابع چندجمله‌ای از فرکانس‌های داپلر هستند. به این ترتیب بررسی توان ICI با این دو کران بسیار راحت‌تر از مقدار دقیق آن در (۱۴) است و دید بهتری از میزان تداخل می‌دهد.

### ۶- نتایج

با توجه به کران بالا و پایین به دست آمده مشاهده می‌شود که زمانی که کانال متغیر با زمان نیست و به عبارت دیگر  $f_d = 0$  است، به ازای  $\alpha = \pi/2$  کران‌ها برابر صفر می‌شوند که نشان می‌دهد در کانال‌های نامتغیر با زمان سیستم FT-OFDM بهینه است. همچنین اگر کانال تخت باشد و چندمسیره نباشد، کران بالا و پایین مستقل از  $\alpha$  هستند و این نشان‌دهنده این است که عملکرد دو سیستم FT-OFDM و FrFT-OFDM در کانال‌های تخت تفاوتی نمی‌کنند. با توجه به عبارت به دست آمده برای کران بالا و مقدار دقیق  $P_{ICI}$ ، دیده می‌شود که در حالی که برای کانال رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{f_1}{\tau_1} = \frac{f_2}{\tau_2} = \dots = \frac{f_L}{\tau_L} \quad (23)$$

$$\hat{d}(m) = c_{m,m} d(m) + \underbrace{\sum_{m \neq k} c_{m,k} d(k)}_{ICI} \quad (10)$$

که در آن داریم

$$c_{m,k} = \frac{1}{T} \sum_i \exp\left(\frac{-j2\pi \sin \alpha}{2T} (k^r - m^r) \cot \alpha\right) \times \exp\left(\frac{-j\tau_i^r \cot \alpha}{2} \exp\left(\frac{-j2\pi k \tau_i}{T}\right)\right) \quad (11)$$

$$\int_0^T h_i(t) \exp\left(j\left(\frac{2\pi(k-m)}{T} + \tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i\right)t\right) dt$$

با فرض iid<sup>۱</sup> داده‌های اولیه و نرمالیزه بودن توان آنها، توان ICI برابر است با

$$P_{ICI} = E \left| \sum_{k \neq m} c_{m,k} d(k) \right|^r = E \sum_{k \neq m} |c_{m,k}|^r \quad (12)$$

که در آن داریم

$$E |c_{m,k}|^r = \frac{1}{T^r} \sum_i \int_0^T \int_0^T \sigma_i^r \exp\left(-\frac{j2\pi}{T} (m-k)(t-t')\right) \times \exp\left(j(\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)(t-t')\right) \times J_r(2\pi f_d (t-t')) dt dt' \quad (13)$$

که با تغییر متغیرهای  $t-t' = Tx$  و  $m-k = l$  توان ICI برابر است با

$$P_{ICI} = \sum_{l \neq 0} \sum_i \sigma_i^r \int_{-1}^1 r(Tv) (1-|v|) \times \exp(j(\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)Tv) \times \exp(-j2\pi lv) dv \quad (14)$$

$$\sum_i \sum_i \sigma_i^r \int_{-1}^1 r(Tv) (1-|v|) \times \cos((\tau_i \cot \alpha T - 2\pi f_i T - 2\pi l)v) dv$$

عبارت بالا که مقدار دقیق تداخل را مشخص می‌کند رابطه پیچیده‌ای است و دید مناسبی از چگونگی تغییر تداخل بر حسب فرکانس داپلر یا زاویه تبدیل FrFT فراهم نمی‌کند. به همین دلیل در بخش بعد کران بالا و پایینی برای توان تداخل محاسبه می‌کنیم که چگونگی تأثیر پارامترهای ذکر شده بر ICI را روشن می‌کند.

### ۵- کران بالا و پایین ICI در سیستم FRFT-OFDM

برای محاسبه کران بالا و پایین توان تداخل ابتدا با فرض زیادبودن تعداد زیرحامل‌ها و با استفاده از رابطه زیر

$$\sum_l \exp(-j2\pi lv) = \sum_m \delta(v-m) \quad (15)$$

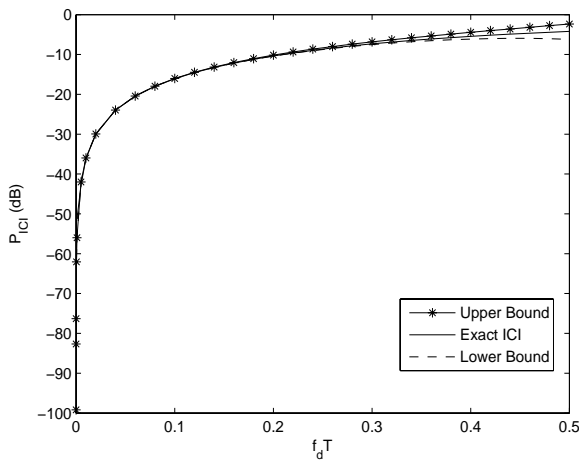
که  $m$  و  $l$  اعداد صحیح هستند و همچنین با فرض  $\sum_i \sigma_i^r = 1$   $P_{ICI}$  را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$P_{ICI} = \sum_i \sigma_i^r \int_{-1}^1 r(Tv) (1-|v|) \times \exp(j(\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)Tv) \times \left( \sum_m \delta(v-m) - 1 \right) dv \quad (16)$$

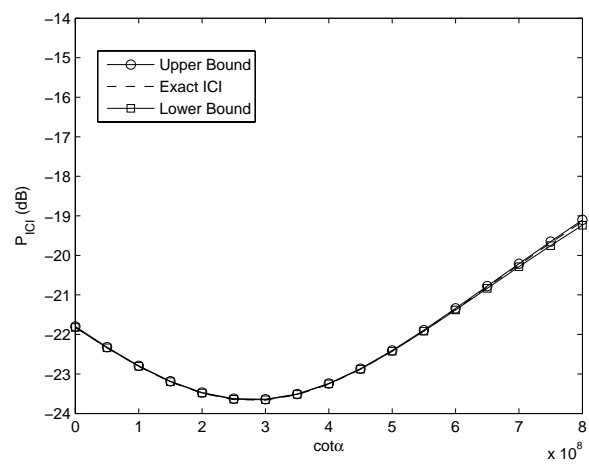
$$1 - 2 \sum_i \sigma_i^r \int_{-1}^1 r(Tv) (1-v) \cos((\tau_i \cot \alpha - 2\pi f_i)Tv) dv$$

با استفاده از کران‌های تابع  $\cos \theta$

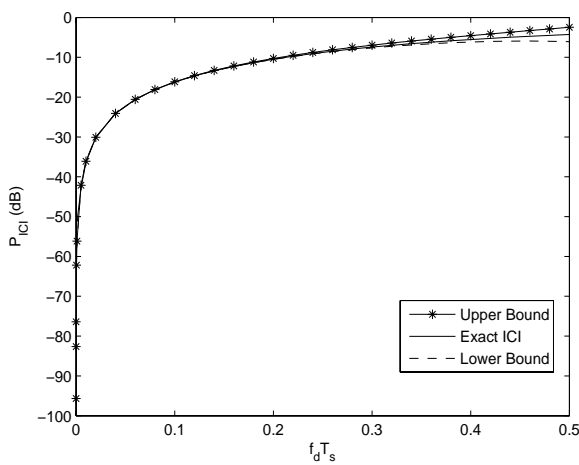
1. Independent Identically Distributed



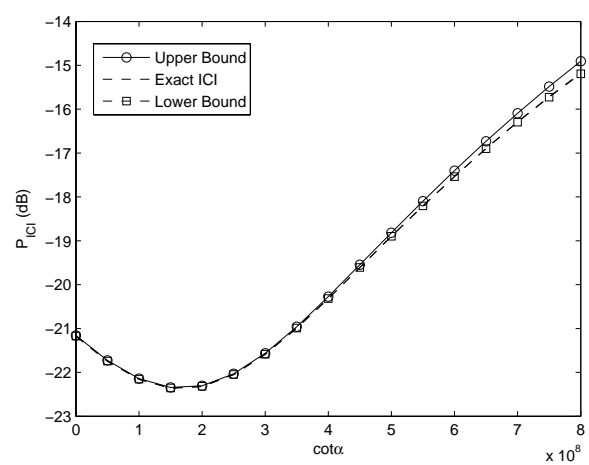
شکل ۴: مقدار دقیق توان ICI و کران‌های بالا و پایین آن بر حسب ماکسیمم فرکانس داپلر نرمالیزه در کانال دومسیره با  $\alpha = (\pi/2) \times 10^{-3}$ .



شکل ۲: مقدار دقیق توان ICI و کران‌های بالا و پایین آن بر حسب  $\cot \alpha$  در کانال دومسیره با فرکانس‌های داپلر  $f = [0, 400](\text{Hz})$ .



شکل ۵: مقدار دقیق توان ICI و کران‌های بالا و پایین آن بر حسب ماکسیمم فرکانس داپلر نرمالیزه در کانال سه‌مسیره با  $\alpha = (\pi/2) \times 10^{-3}$ .



شکل ۳: مقدار دقیق توان ICI و کران‌های بالا و پایین آن بر حسب  $\cot \alpha$  در کانال سه‌مسیره با فرکانس‌های داپلر  $f = [30, 430, 220](\text{Hz})$ .

جدول ۲: مشخصات کلی کانال سه‌مسیره.

توان مسیرهها (dB)	۰	-۴,۳۴۲۹	-۸,۶۸۵۹
تأخیر مسیرهها ( $\mu\text{sec}$ )	۰	۹	۱۸

جدول ۱: مشخصات کلی کانال دومسیره.

توان مسیرهها (dB)	۰	-۴,۳۴۲۹
تأخیر مسیرهها ( $\mu\text{sec}$ )	۰	۹

حسب  $\cot \alpha$  در شکل ۳ آمده است. با توجه به این نمودار هم دیده می‌شود که کران‌ها به خوبی زاویه‌ای را که در آن توان تداخل مینیمم می‌شود نشان می‌دهند. شکل‌های ۴ و ۵ نیز توان تداخل و کران‌های آن را به ترتیب در کانال دومسیره و سه‌مسیره با  $\alpha = (\pi/2) \times 10^{-3}$  بر حسب ماکسیمم فرکانس داپلر نرمالیزه نشان می‌دهند. با توجه به این دو شکل دیده می‌شود که کران‌ها به خصوص در فرکانس‌های داپلر کوچک‌تر دارای دقت خوبی هستند.

با دقت عبارت کران‌ها دیده می‌شود که کران پایین و بالا در فرکانس‌های داپلر بزرگ به ترتیب تابعی نزولی و صعودی از  $|\cot \alpha|$  هستند و بنابراین در فرکانس‌های داپلر بزرگ و در زوایای تبدیل بسیار نزدیک به صفر یا  $\pi$ ، دقت خود را کمی از دست می‌دهند. ولی در عمل فرکانس داپلر خیلی بزرگ نیست و معمولاً از ۱۰۰۰ هرتز کمتر است.

برای مقایسه عملکرد ۳ سیستم SC، FT-OFDM و FrFT-OFDM با زاویه تبدیل بهینه در کانال‌های فرکانس گزین متغیر با زمان به بررسی خطای بیت (BER) این سه سیستم در این نوع کانال‌ها می‌پردازیم.

## 2. Bit Error Rate

به عبارت دیگر تابع گسترش<sup>۱</sup> کانال در صفحه تأخیر- داپلر خطی باشد، آن گاه زاویه  $\alpha = \cot^{-1}(2\pi f_i / \tau_i)$  بهینه است. در عمل کانالی که این ویژگی را دارد کانال دومسیره است [۱۳] و [۱۴].

برای بررسی و تحلیل رفتار کران‌ها و میزان دقت و نزدیکی آنها به مقدار واقعی توان تداخل به بررسی آنها در دو کانال دو و سه‌مسیره به ترتیب با مشخصات کلی موجود در جدول‌های ۱ و ۲ می‌پردازیم. جهت جامع‌بودن بررسی‌ها، کانال‌ها طوری انتخاب شده‌اند که کانال دومسیره ویژگی مذکور در (۲۳) را دارد اما کانال سه‌مسیره این ویژگی را ندارد. شکل ۲ میزان توان تداخل و کران‌های به دست آمده را برای کانال دومسیره با فرکانس‌های داپلر  $f = [0, 400](\text{Hz})$  بر حسب  $\cot \alpha$  نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار می‌توان دید که کران‌ها به مقدار واقعی نزدیک هستند و به خوبی زاویه‌ای را که در آن مینیمم است، نشان می‌دهند. این زاویه همان طور که گفته شد از رابطه  $\alpha = \cot^{-1}(2\pi f_i / \tau_i)$  به دست می‌آید. میزان تداخل و کران‌های آن در کانال سه‌مسیره با فرکانس‌های داپلر  $f = [30, 430, 220](\text{Hz})$  بر

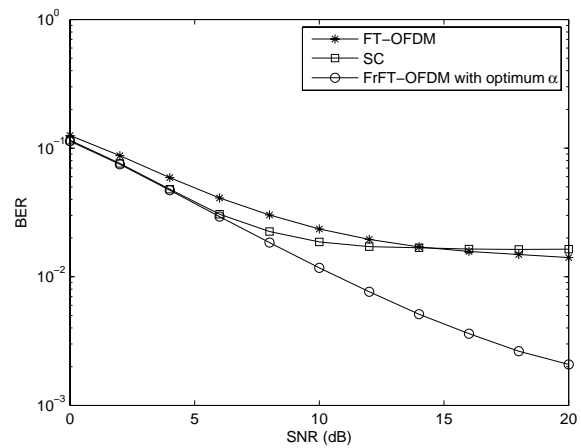
## 1. Spread Function

FrFT-OFDM و FT-OFDM یکسان است و در کانال‌های نامتغیر با زمان به ازای  $\alpha = \pi/2$  توان تداخل و کران‌های آن صفر می‌شوند که این نشان‌دهنده بهینه‌بودن FT-OFDM در این کانال‌ها است. با توجه به عبارت دقیق توان تداخل و کران بالای به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت در شرایطی که (۲۳) بین فرکانس‌های داپلر مسیرهای کانال صادق باشد،  $\alpha = \cot^{-1}(2\pi f_i/\tau_i)$  بهینه است. همچنین بررسی توان تداخل و کران‌های آن در دو کانال دومسیره و سهمسیره نشان می‌دهد که کران‌های به دست آمده دارای دقت خوبی هستند و می‌توانند زاویه‌ای را که توان تداخل را مینیمم می‌سازد به خوبی مشخص کنند. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی نشان می‌دهند که سیستم FrFT-OFDM با زاویه تبدیل بهینه در کانال‌های فرکانس گزین متغیر با زمان، دارای عملکرد بهتری نسبت به دو سیستم SC و FT-OFDM است.

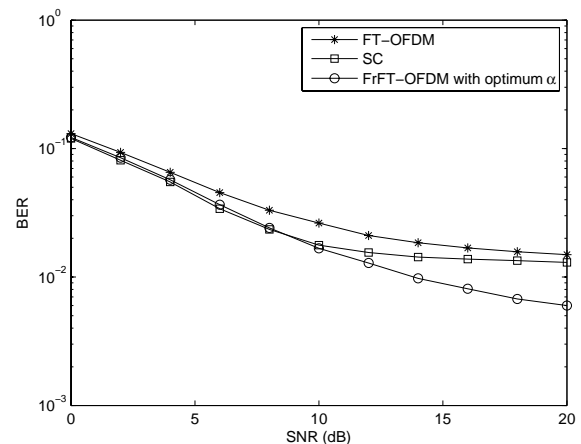
## مراجع

- [1] Y. Zhou, J. Wang, and M. Sawahashi, "Downlink transmission of broadband OFCDM systems - part II: effect of doppler shift," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 6, pp. 1097-1108, Jun. 2006.
- [2] K. A. Hamdi, "Unified error-rate analysis of OFDM over time-varying channels," *IEEE Trans. Wireless Communications*, vol. 10, no. 8, pp. 2692-2702, Aug. 2011.
- [3] M. Martone, "A multicarrier system based on the fractional fourier transform for time-frequency-selective channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 6, pp. 1011-1020, Jun. 2001.
- [4] N. Benvenuto, R. Dinis, D. Falconer, and S. Tomasin, "Single carrier modulation with nonlinear frequency domain equalization: an idea whose time has come again," *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, pp. 69-96, Jan. 2010.
- [5] S. Pei and J. Ding, "Closed-form discrete fractional and affine fourier transforms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 5, pp. 1338-1353, May 2000.
- [6] A. Serbes and L. D. Ata, "Eigenvectors of the DFT and discrete fractional fourier transform based on the bilinear transform," in *Proc. IEEE 18th Signal Processing and Communications Applications Conf.*, pp. 268-271, 22-24 Apr. 2010.
- [7] B. Tianyang, "A fast two-dimension discrete fractional fourier transform algorithm and its application on digital watermarking," in *Proc. IEEE 12th. Int. Conf. on Communication Technology, ICCT'10*, pp. 120-123, 11-14 Nov. 2010.
- [8] J. Zheng and Z. Wang, "ICI analysis for FRFT-OFDM systems to frequency offset in time-frequency selective fading channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 14, no. 10, pp. 888-890, Oct. 2010.
- [9] L. B. Almeida, "The fractional fourier transform and time, frequency representations," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 3084-3091, Nov. 1994.
- [10] S. C. Pei and J. J. Ding, "Closed-form discrete fractional and affine fourier transforms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 5, pp. 1338-1353, May 2000.
- [11] K. Panta and J. Armstrong, "Analysis of continuous time domain representation of OFDM signals," in *Proc. Australasian Telecommunication Networks and Applications Conf., ATNAC'11*, 3 pp. 3, 9-11 Nov. 2011.
- [12] Y. Li and L. J. Cimini, "Bounds on the interchannel interference of OFDM in time-varying impairments," *IEEE Trans. Communications*, vol. 49, no. 3, pp. 401-404, Mar. 2001.
- [13] S. Barbarossa and R. Tosti, "Chirped-OFDM for transmission over time-varying channels with linear delay-doppler spreading," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 4, pp. 2377-2380, Salt Lake City, UT, USA, 7-11 May 2001.
- [14] T. Erseghe, N. Laurenti, and V. Cellini, "A multicarrier architecture based upon the affine fourier transform," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 53, no. 5, pp. 853-862, May 2005.

زهره مختاری تحصیلات خود را در مقطع کارشناسی مهندسی برق-مخابرات در سال ۱۳۹۰ از دانشگاه یزد و در مقطع کارشناسی ارشد مهندسی برق-مخابرات سیستم در سال ۱۳۹۲ از دانشگاه تهران به پایان رسانده است و هم‌اکنون دانشجوی مقطع دکتری مهندسی برق-مخابرات سیستم دانشگاه تهران می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: مخابرات سلولی نسل چهارم و پنجم، سیستم‌های چند ورودی چند خروجی بزرگ مقیاس، تبدیل فوریه کسری و همگام‌سازی فرکانسی و زمانی.



شکل ۶: خطای بیت سه سیستم FT-OFDM، SC و FrFT-OFDM با  $\alpha$  بهینه بر حسب SNR در کانال دومسیره.



شکل ۷: خطای بیت سه سیستم FT-OFDM، SC و FrFT-OFDM با  $\alpha$  بهینه بر حسب SNR در کانال سهمسیره.

شکل‌های ۶ و ۷ نمودارهای BER بر حسب  $SNR^1$  را برای سه سیستم مذکور به ترتیب در کانال دو و سهمسیره نشان می‌دهند. با توجه به این دو شکل نتیجه می‌شود که در کانال‌های فرکانس گزین متغیر با زمان، خطای بیت سیستم FrFT-OFDM با زاویه تبدیل بهینه در  $SNR$ ‌های بالا کمتر از سیستم‌های SC و FT-OFDM است. همچنین با مقایسه شکل ۶ و ۷ دیده می‌شود که به کارگیری تبدیل فوریه کسری در کانال‌هایی که دارای ویژگی ذکرشده در (۲۳) هستند، باعث بهبود بیشتر عملکرد سیستم می‌شود. دلیل این امر این است که در کانال‌هایی که دارای تابع گسترش خطی در صفحه تأخیر-داپلر هستند، ماتریس کانال در حوزه FrFT با زاویه بهینه به ماتریس قطری نزدیک‌تر است و به این ترتیب توان ICI کمتری وجود دارد.

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله پس از محاسبه مقدار دقیق ICI به ارائه کران بالا و پایین برای آن پرداخته‌ایم. این کران‌ها ضمن داشتن دقت مناسب و نزدیک بودن مقدار آنها به مقدار واقعی، دارای عبارات ساده‌ای هستند و بررسی آنها راحت‌تر است و دید بهتری از میزان تداخل بر حسب پارامترهای کانال و سیستم می‌دهند. با توجه به عبارات به دست آمده برای ICI و کران‌های آن متوجه می‌شویم که در کانال‌های تخت عملکرد دو سیستم

مریم صباغیان در سال‌های ۱۳۷۸ و ۱۳۸۰ به ترتیب مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی برق خود را از دانشگاه صنعتی شریف و در سال ۱۳۸۶ مدرک دکتری مهندسی برق خود را از دانشگاه کارلتون در کانادا دریافت نمود. از سال ۱۳۸۷ الی ۱۳۸۹ نام‌برده به عنوان همکار فوق دکتری در دانشگاه هاروارد آمریکا حضور داشت و هم‌اکنون استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه نام‌برده متنوع بوده و شامل موضوعاتی مانند مخابرات سلولی نسل چهارم و پنجم، سیستم‌های چند ورودی چند خروجی بزرگ مقیاس، موج‌های میلی‌متری، سیستم‌های رادیوشناختی، همسان‌سازی حوزه فرکانس و همگام‌سازی فرکانسی و زمانی می‌باشد.